Кто не сможет на экзамене пояснить смысл этих уравнений, получит «неуд»!

$div\vec{D}=\rho$ $rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $div\vec{B}=0$ $rot\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oiint_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=q_\Sigma$ $\oint_\Gamma\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\frac{d}{dt}\iint_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ $\oiint_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0$ $\oint_\Gamma\left(\vec{H},d\vec{l}\right)=I_\Sigma+\frac{d}{dt}\iint_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)$

$$\vec{j}=\gamma\cdot\vec{E},\quad \vec{D}=\varepsilon_0\cdot\vec{E}+\vec{P},\quad \vec{B}=\mu_0\cdot\left(\vec{H}+\vec{J}\right),\quad div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma,\quad E_{1t}=E_{2t}$$

$$B_{2n}=B_{1n},\quad H_{2t}-H_{1t}=i$$

Лекция 1. **Электрическое поле системы неподвижных зарядов в вакууме.** ***Электрический заряд. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции и его применение к расчёту поля системы неподвижных зарядов.***

Наряду с массой одним из свойств частиц вещества является **электрический заряд**. Различают два вида электрического заряда: **положительный и отрицательный**. Ядро любого атома считается положительно заряженным. Электроны имеют, по определению, отрицательный заряд. О наличии заряда у тела судят по его взаимодействию с другими заряженными частицами. При этом одноименно заряженные тела отталкиваются, а разноименно заряженные – притягиваются.

Элементарным зарядом называется абсолютная величина электрического заряда электрона или ядра атома водорода – протона. В СИ величина элементарного заряда равна

e=1,6·10^{-19} Кл (единица измерения – Кулон.) Любой электрический заряд кратен элементарному заряду.

Электрические заряды могут появляться или исчезать только *попарно*. Отсюда следует:

<u>закон сохранения электрического заряда</u> – ***сумма зарядов в замкнутой системе остается постоянной***.

В классической теории электромагнитных явлений широко применяется понятие ***неподвижного точечного заряда.***

Точечным электрическим зарядом называется заряженное тело, размерами которого (в условиях данной задачи) можно пренебречь. *Можно говорить о точке, имеющей электрический заряд.*

При рассмотрении микроскопических заряженных частиц (~ 10^{-6} м) в качестве точечных зарядов можно применять классическую теорию электромагнетизма только с учётом «усреднения по времени»: любая микрочастица, находящаяся, например, в газе, постоянно совершает хаотическое (броуновское) движение. Поэтому, если необходимо рассматривать положение даже одной электрически заряженной частицы в газе (при отсутствии других микроскопических зарядов и фонового излучения), то приходится рассматривать усредненные по времени физические величины.

В масштабах, соизмеримых с размерами атомов (~ 10^{-10} м), методы классической электродинамики, вообще говоря, неприменимы. Однако, в некоторых частных случаях, классическое рассмотрение взаимодействия ядра и электрона с окружающим электромагнитным полем приводит к качественно верным результатам. Это бывает полезно с методологической точки зрения, т.к. классический подход приводит к менее «трудоёмким» моделям.

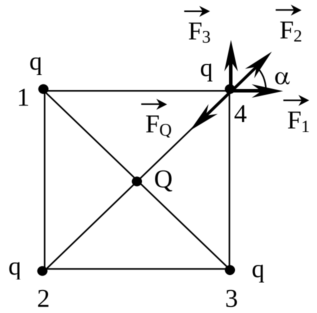
Опыты показывают, что взаимодействие неподвижных точечных зарядов определяется следующим законом (**закон Кулона**):

Сила электростатического взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов, находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга, прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой:

$$\vec{F}_{ik} = k\frac{q_i q_k}{r_{ik}^{\ 2}}\frac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}},$$

где $\vec{F}_{ik}$ – сила, действующая на заряд q_k со стороны заряда q_i, а $\vec{r}_{ik}$ – радиус-вектор, проведённый от заряда q_i к заряду q_k.

В СИ постоянный коэффициент k (не путайте с постоянной Больцмана!) равен:



$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \approx \dfrac{9\cdot 10^9}{\varepsilon}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ для среды с диэлектрической проницаемостью ε, а ε_0 - электрическая постоянная. Для вакуума ε=1, поэтому $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

Для силы Кулона справедливо утверждение (***принцип суперпозиции для сил***): ***вектор силы, действующей на точечный заряд со стороны остальных зарядов, равен векторной сумме сил, действующих со стороны каждого заряда в отдельности:*** $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ **.** Поэтому, при рассмотрении (статического) взаимодействия макроскопических заряженных тел, необходимо разбить каждое из них на точечные заряды, и затем найти вектор суммарной силы попарных взаимодействий всех точек этих тел.

Пример 1. В вершинах квадрата со стороной *a* находятся одинаковые одноименные заряды, равные q. Какой заряд Q необходимо поместить в центре квадрата, чтобы система находилась в равновесии?

Решение. Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов, например, 4-й. Со стороны зарядов 1, 2, 3 на него действуют силы отталкивания. Величина равнодействующей этих сил (в проекции на диагональное направление) равна

$$F_{\text{РЕЗ}} = F_1\cos\alpha + F_3\cos\alpha + F_2 =$$

$$= k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{q^2}{2a^2} = k\frac{q^2}{2a^2}\left(2\sqrt{2}+1\right).$$

Тогда, чтобы заряд находился в равновесии, он должен притягиваться к **противоположному** по знаку заряду с силой

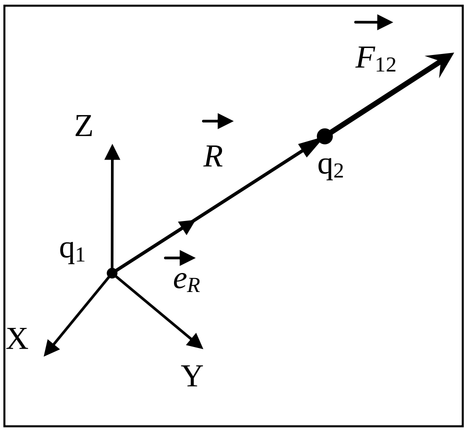
$$F_Q = k\frac{|q||Q|}{a^2/2} = k\frac{q^2}{2a^2}\left(2\sqrt{2}+1\right). \qquad \text{Отсюда } |Q| = |q|\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{4}.$$

Сила Кулона является ***консервативной*** (для данных двух зарядов она зависит только от расстояния между ними), следовательно, для нее можно ввести потенциальную энергию $W_{\text{ПОТ}}$.

Утверждение. Энергия взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов определяется следующим соотношением:

$$\boxed{W = k\frac{q_1\cdot q_2}{R} + C}.$$

(Обратите внимание на показатель степени в знаменателе и отсутствие модуля зарядов.).



Доказательство. Консервативная сила и соответствующая ей потенциальная энергия должны быть связаны соотношением:

$$\vec{F} = -grad(W_{пот}).$$

Рассмотрим систему отсчёта, в которой один из зарядов (q_1) покоится в начале координат, а второй (q_2) находится в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{R} = (x, y, z)$. Пусть заряды будут одноименными. Тогда вектор силы Кулона, действующий на второй заряд со стороны первого равен:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{R^2}\vec{e}_R \qquad ,$$

где $\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$ - единичный вектор направления для радиус-вектора.

Найдем выражение для градиента от потенциальной энергии

$$grad(W_{пот}) = \left(\frac{\partial W_{пот}}{\partial x}, \frac{\partial W_{пот}}{\partial y}, \frac{\partial W_{пот}}{\partial z}\right).$$

Так как $C = \text{const}$, а $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то, например,

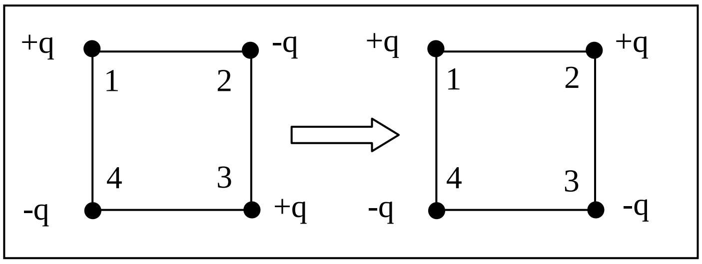
$$\frac{\partial W_{\text{ПОТ}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{q_1 q_2}{R} + C\right) = kq_1 q_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -kq_1 q_2 \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{x}{R}.$$

Аналогично, $\frac{\partial W_{пот}}{\partial y} = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{y}{R}$, $\frac{\partial W_{пот}}{\partial z} = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{z}{R}$.

Поэтому

$$grad\left(W_{\text{ПОТ}}\right) = \left(-k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{x}{R}, -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{y}{R}, -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\cdot\frac{z}{R}\right) = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right) = -k\frac{q_1 q_2}{R^2}\vec{e}_R = -\vec{F}.$$

Пример 2. **Какую работу необходимо совершить, чтобы перестроить систему четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной *a* ? Заряд q считать известным (см. рис.).**



Решение. Работа сил поля равна изменению потенциальной энергии системы зарядов:

$$A_{\text{ПОЛЯ}} = -\Delta W_{\text{ПОТ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}}.$$

Начальная энергия системы равна сумме энергий ПОПАРНЫХ взаимодействия между ВСЕМИ зарядами: 1 и 2: $W_{12} = k\dfrac{q\cdot(-q)}{a}$, 1 и 3: $W_{13} = k\dfrac{qq}{\sqrt{2}a}$, 1 и 4: $W_{14} = k\dfrac{q\cdot(-q)}{a}$,

2 и 3: $W_{23} = k\dfrac{q\cdot(-q)}{a}$, 2 и 4: $W_{24} = k\dfrac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a}$, 3 и 4: $W_{34} = k\dfrac{q\cdot(-q)}{a}$.

В итоге, начальная энергия системы зарядов равна:

$$W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34},$$

$$W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} = k\frac{q(-q)}{a} + k\frac{qq}{a\sqrt{2}} + k\frac{q(-q)}{a} + k\frac{q(-q)}{a} + k\frac{(-q)(-q)}{a\sqrt{2}} + k\frac{q(-q)}{a} = -4k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}.$$

Аналогично подсчитываем конечную энергию системы зарядов:

$$W_{\text{ПОТ\_КОН}} = k\frac{qq}{a} - k\frac{qq}{a\sqrt{2}} - k\frac{qq}{a} - k\frac{qq}{a} - k\frac{qq}{a\sqrt{2}} + k\frac{qq}{a} = -2k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}.$$

Поэтому искомая работа равна:

$$A_{\text{ПОЛЯ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ\_КОН}} = -k\frac{q^2}{a}(4-2\sqrt{2}).$$

Работа сил поля равна $A_{\text{ПОЛЯ}} = -A_{\text{ВНЕШ}}$, поэтому $A_{\text{ВНЕШ}} = k\dfrac{q^2}{a}\left(4-2\sqrt{2}\right)$.

Замечание. Сравним по интенсивности электрическое и гравитационное взаимодействия двух точечных одинаковых заряженных элементарных частиц.

$$\frac{F_K}{F_G} = \frac{\left(k\dfrac{q^2}{R^2}\right)}{\left(G\dfrac{m^2}{R^2}\right)} = \frac{k}{G}\frac{q^2}{m^2} \approx \frac{9\cdot 10^9}{6,67\cdot 10^{-11}}\left(\frac{q}{m}\right)^2 \approx 1,35\cdot 10^{20}\left(\frac{q}{m}\right)^2.$$

Например, для электрона $\dfrac{q}{m} \approx 1,76\cdot 10^{11}$ Кл/кг, поэтому $\dfrac{F_K}{F_G} \approx 4\cdot 10^{42}$,

для протона $\dfrac{q}{m} \approx 10^8$ Кл/кг, поэтому $\dfrac{F_K}{F_G} \approx 1,35\cdot 10^{36}$.

Т.е. электрическое взаимодействие намного интенсивнее, чем гравитационное. Однако при рассмотрении макросистем оказывается, что электрические заряды компенсируют друг друга и роль электрических сил становится незначительной. Поэтому в больших (космических) масштабах решающую роль играют гравитационные силы.

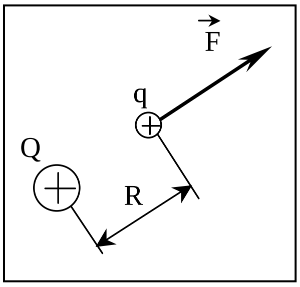
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.

По современным представлениям электрические заряды взаимодействуют посредством некоторой материальной субстанции, которая называется ***электрическим полем*** и является одной из форм проявления ***электромагнитного* поля**.

Электрическое поле в данной точке пространства характеризуется потенциалом и напряжённостью.

НАПРЯЖЁННОСТЬ ПОЛЯ

Электрическое поле имеет ***силовую характеристику - вектор напряжённости***, который определяется как отношение вектора силы, действующей на точечный заряд q, помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Величина напряжённости измеряется Н/Кл или В/м (Вольт на метр). Зная напряжённость поля в данной точке можно найти силу, действующую на заряд:

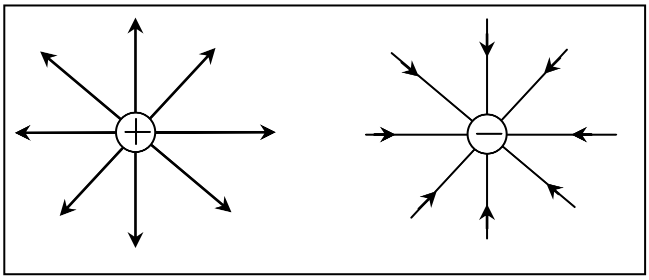
$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Отсюда видно, что на положительно заряженные частицы (q >0) сила действует по направлению вектора напряжённости электрического поля ($\vec{F}\uparrow\uparrow\vec{E}$), а на отрицательно заряженные (q <0) - против ($\vec{F}\uparrow\downarrow\vec{E}$).

Правило: чтобы найти направление вектора напряжённости электрического поля в данной точке, надо поместить в эту точку ***положительный*** (*пробный)* заряд. Тогда вектор напряжённости будет направлен так же как и вектор силы, действующей на заряд.

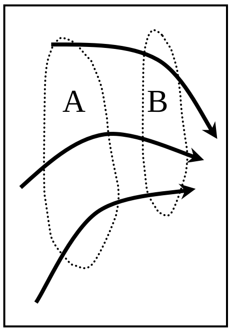
Найдем напряжённость поля, создаваемого положительным точечным зарядом Q на расстоянии R от него. Для этого возьмем положительный заряд q и поместим его на расстоянии R от заряда Q. Тогда эти заряды будут отталкиваться с силой, величина которой: $F = k\dfrac{qQ}{R^2}$, и она направлена по линии соединяющей точечные заряды. Поэтому величина напряженности поля будет равна:

$$E = \frac{F}{q} = k\frac{Q}{R^2}.$$



Вектор напряжённости направлен в данном случае, так же как и вектор силы (мы делим вектор силы F на положительное число q!). То есть вектор напряжённости поля, создаваемого положительным зарядом, направлен от него, а отрицательным – к нему.

Силовой линией электрического поля называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. Таким образом, ***силовые линии электрического поля направлены от положительного заряда к отрицательному***.



Замечание. Из рисунка (для точечного заряда) видно, что силовые линии расположены гуще вблизи заряда, т.е. там, где величина напряжённости поля выше. Это относительное возрастание густоты силовых линий используют для условного обозначения областей с большей напряжённостью поля.

Например, на рисунке (справа) в области B напряжённость поля больше, чем в области A. Через каждую точку пространства, занятого полем, можно провести только одну силовую линию.

УРАВНЕНИЕ СИЛОВОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

По определению касательный вектор к линии лежит на одной прямой с вектором напряжённости в точке пространства, через которую проходит силовая линия, т.е. эти векторы пропорциональны друг другу.

Пусть τ - параметр, задающий линию в трехмерном пространстве, а кривая задаётся координатами $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, тогда касательный вектор к этой кривой определяется как $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$. Поэтому $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = \mathrm{A} \cdot \vec{E}$, где A – коэффициент пропорциональности. Исключая параметр τ, получаем «каноническую» форму записи уравнения силовой линии $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

Вектор напряжённости поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равен векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{\mathrm{E}} = \sum_i \vec{\mathrm{E}}_i .$$

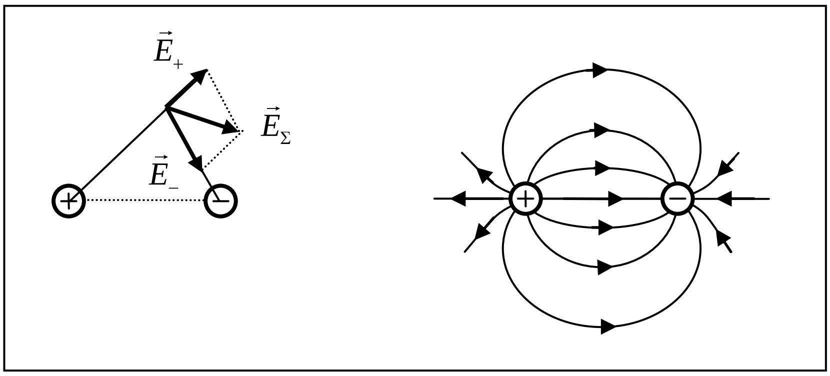
Это следует из того, что силы складываются как векторы: $\vec{\mathrm{F}} = \sum_i \vec{\mathrm{F}}_i$, поэтому

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{\mathrm{q}} = \frac{\sum_i \vec{\mathrm{F}}_i}{\mathrm{q}} = \sum_i \frac{\vec{\mathrm{F}}_i}{\mathrm{q}} = \sum_i \vec{\mathrm{E}}_i .$$

Примеры на принцип суперпозиции.

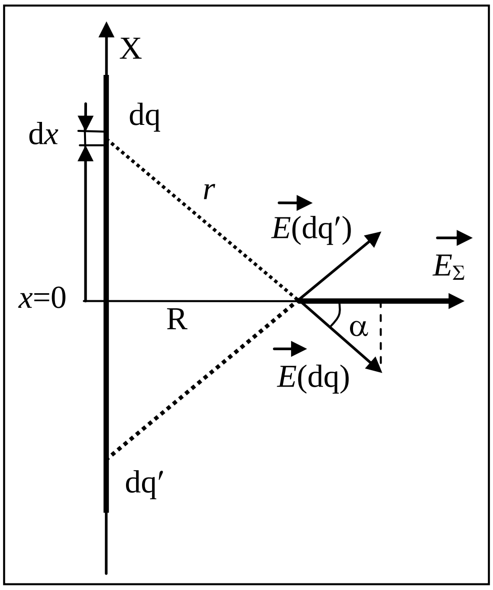
1) Рассмотрим систему из двух одинаковых неподвижных точечных зарядов.

Напряжённость поля, создаваемого зарядами, равна сумме напряжённостей полей,



создаваемых каждым из зарядов в отдельности, $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$. Тогда получаем картину силовых линий.

2) Найдем напряжённость поля бесконечной прямой равномерно заряженной нити.



Пусть λ - линейная плотность заряда нити (это означает, что кусок нити длиной L имеет заряд q=λ·L). Будем искать напряжённость в точке, расположенной от нити на расстоянии R (точка наблюдения и нить лежат в плоскости рисунка). Вдоль нити вводим ось X, начало которой является основанием перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки на нить.

На некотором расстоянии от начала выделяем малый кусок нити длиной dx, тогда заряд этого куска dq = λ·dx. Рассматривая заряд этого куска нити как точечный заряд, находим создаваемое им поле с вектором напряжённости в рассматриваемой точке $\vec{E}(dq)$.

Симметричный (относительно начала оси X) точечный заряд dq′ создаёт поле с симметричным вектором напряжённости $\vec{E}(dq')$. Вектор их суммы $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}(dq) + \vec{E}(dq')$ лежит на перпендикуляре к нити. Таким образом, общий вектор напряжённости тоже должен быть направлен перпендикулярно нити. Следовательно, при суммировании векторов напряжённостей от всех точечных зарядов на нити можно учитывать только их перпендикулярную составляющую, т.е. найти сумму проекций на перпендикулярное направление: $E = \sum\limits_{dq} E(dq)\cdot cos\,\alpha$.

Так как $E(dq) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$, $cos\,\alpha = \frac{R}{r}$, $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, то, применяя операцию интегрирования, находим: $E = \int\limits_{\text{НИТЬ}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{R}{r} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Далее интегрируем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(R^2+x^2\right)dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Берём второй интеграл по частям $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\begin{bmatrix} dv=\dfrac{xdx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx, v=-\dfrac{1}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ u=x, du=dx \end{bmatrix}=-\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-2+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

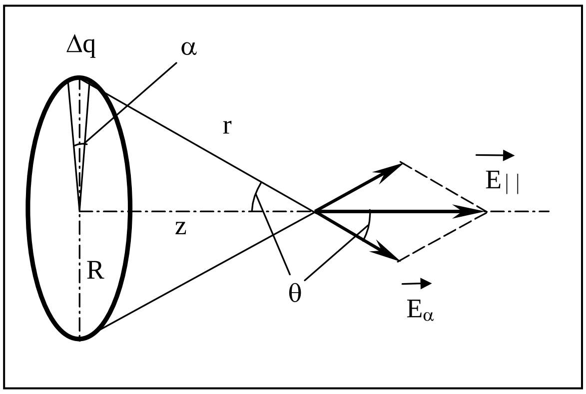
Откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}+2-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{2}{R^2}.$$

Окончательно имеем: $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$.

3) Найдем напряжённость поля на оси заряженного кольца, радиус которого *R*, а заряд *Q*.

Разобьём кольцо на большое количество участков, опирающихся на центральный угол $\alpha=\dfrac{2\pi}{N}$. (Длина одного участка $L=\dfrac{2\pi R}{N}$.) Заряд одного участка $q=\dfrac{Q}{N}$, где Q – заряд кольца. Будем считать, что Q>0. Принимая малый участок кольца за точечный заряд можно найти напряжённость поля на оси кольца, создаваемого одним участком: $E_\alpha=k\dfrac{q}{r^2}$, где $r=\sqrt{R^2+z^2}$ - расстояние от заряда до рассматриваемой точки. При этом участок, расположенный симметрично относительно центра кольца, создает поле в рассматриваемой точке с вектором напряжённости, симметричным уже найденному. Их сумма будет лежать на оси кольца (вектор $\vec{E}_{||}$). Поэтому при суммировании всех векторов напряжённости (от каждого из участков) будем иметь в рассматриваемой точке результирующий вектор, направленный по оси кольца, длина которого равна $E_\alpha\cos\theta$,

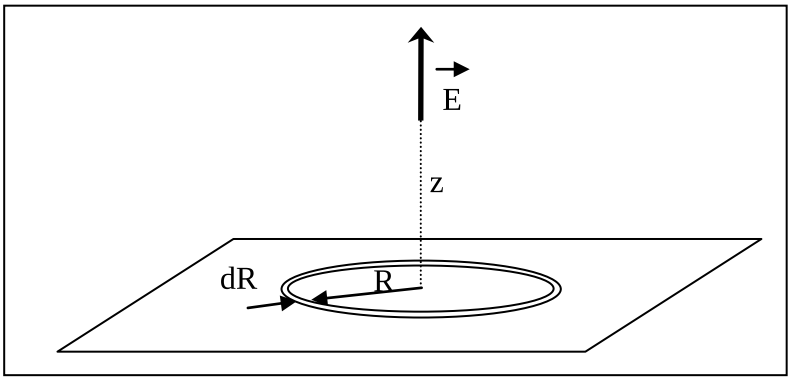


где $\cos\theta=\dfrac{z}{r}=\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$. В итоге получаем,

$$E=\sum E_\alpha\cos\theta=Nk\frac{q}{r^2}\cdot\frac{z}{r}=Nk\frac{Q/N}{R^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}=k\frac{Qz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Отметим, что в центре кольца (z=0) напряжённость поля равна нулю.

4) Рассмотрим бесконечную заряженную плоскость. Пусть поверхностная плотность заряда равна σ. В силу симметрии вектор напряжённости направлен перпен-



дикулярно плоскости.

Найдём напряжённость поля в точке, находящейся на расстоянии *z* от плоскости.

Если плоскость представить как набор тонких, вложенных друг в друга соосных колец, ось которых проходит через искомую точку, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера.

Заряд тонкого кольца, радиус которого R и толщина dR равен

$dq=\sigma \cdot dS=\sigma \cdot 2\pi R dR$.

Тогда искомая напряжённость $E=\sum_{dq} k\frac{z\cdot dq}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Переходя к интегрированию, получаем

$$E=\int\limits_{плоскость}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\cdot\sigma\cdot dS}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\cdot\sigma\cdot 2\pi R dR}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z\cdot\sigma}{4\varepsilon_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\left(R^2+z^2\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z\cdot\sigma}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Величина напряжённости поля заряженной пластины $\mathrm{E}=\frac{\mathrm{q}}{2\varepsilon_0 \mathrm{S}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,

где $\sigma=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{S}}$ - поверхностная плотность заряда (Кл/м^2).

Электрическое поле называется однородным, если вектор напряжённости в каждой точке поля одинаковый (по величине и по направлению). Следовательно, ***поле бесконечной заряженной пластины однородное***.