

Лекция 2. Потенциал электростатического поля.

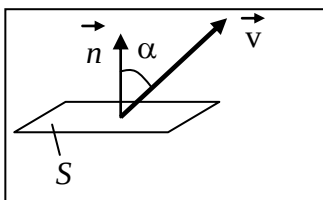
Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряжённости. Связь напряжённости и потенциала.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Будем предполагать, что в некоторой области пространства задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{v}(x, y, z)$.

1) Поток векторного поля через поверхность.

Потоком вектора $\vec{v}$ через некоторую поверхность называется величина $\Phi_v = \iint_S (\vec{v}, d\vec{S})$.



В простейшем случае плоской поверхности S и однородного векторного поля поток определяется как

$$\Phi_v = v \cdot S \cos \alpha,$$

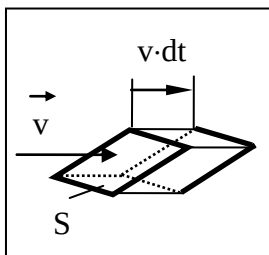
где α - угол между вектором $\vec{v}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке S .

Если поверхность S не является плоской, то она разбивается на элементарные участки величиной dS , такие, что каждый из них можно рассматривать как малую часть плоскости, а поле вблизи площадки – постоянным. Затем для каждого из участков ищется соответствующая величина $\delta\Phi_v = v \cdot dS \cos \alpha$, а потом производится суммирование по всей поверхности $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v$.

Если ввести вектор $d\vec{S}$, перпендикулярный к каждой площадке: $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, где $\vec{n}$ - единичная нормаль к площадке dS , то величину потока записать можно в виде:

$$\delta\Phi_v = v \cdot dS \cos \alpha = (\vec{v}, d\vec{S}).$$

Тогда общий поток $\Phi_v = \sum_S \delta\Phi_v = \iint_S (\vec{v}, d\vec{S})$.

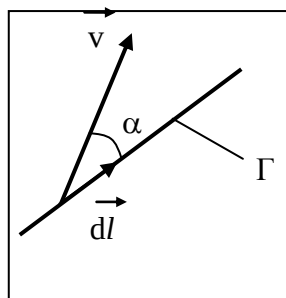


Пример. Найдем объём жидкости, протекающей через некоторую малую наклонную площадку за единицу времени.

Пусть скорость жидкости равна $\vec{v}$ и в пределах площадки её можно считать постоянной, тогда объём жидкости, прошедшей через площадку за малый промежуток времени dt , заполнит внутренность косоугольного параллелепипеда, объём которого равен $S \cos \alpha \cdot v dt$.

Здесь α - угол отклонения вектора скорости жидкости $\vec{v}$ от направления, перпендикулярного площадке, т.е. угол между вектором единичной нормали к площадке и вектором скорости жидкости. Если ввести вектор $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$, то объёмный

расход жидкости, т.е. объём жидкости, протекающей через площадку в единицу времени, можно определить соотношением: $Q = vS \cos \alpha = (\vec{v}, \vec{S})$. ♣



2) Циркуляция векторного поля.

Рассмотрим интеграл от векторного поля $\vec{v}$ вдоль кривой линии Γ :

$\int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$, где $d\vec{l}$ - касательный вектор к каждой точке кривой. Таким

образом, кривая является ориентированной – она имеет начальную и конечную точки (так как задано направление вдоль кривой с помощью вектора $d\vec{l}$).

В случае, когда векторное поле $\vec{v}$ постоянное, а кривая – отрезок прямой линии длиной L , интеграл равен

$$\int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = v \cdot L \cos \alpha,$$

где α - угол между векторами поля и касательным вектором.

В случае если кривая линия не является прямой и векторное поле не постоянное, нужно разбить линию на малые (почти) прямолинейные участки длиной dl , такие, что на каждом из участков поле можно рассматривать как постоянное. Для каждого участка найти величину $v \cdot dl \cos \alpha = (\vec{v}, d\vec{l})$, а затем просуммировать все полученные выражения

$$\sum_{\text{Кривая}} v \cdot dl \cos \alpha = \int_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}).$$

Пусть кривая линия является замкнутой (без самопересечений во внутренних точках). Такую линию будем в дальнейшем называть контуром. Интеграл от векторного поля $\vec{v}$ по замкнутой кривой Γ : $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$ называется циркуляцией этого векторного поля вдоль контура Γ .

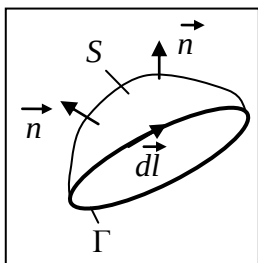
3) Теорема Стокса.

Если рассмотреть незамкнутую поверхность S , то край этой поверхности будет являться замкнутой кривой. Будем считать, что поверхность является ориентируемой (т.е. она – двусторонняя). Если Γ – кривая, являющаяся краем поверхности S , то можно рассмотреть циркуляцию векторного поля вдоль края Γ : $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l})$.

Векторному полю $\vec{v}$ можно сопоставить ещё одно векторное поле $\text{rot}(\vec{v})$, которое называется ротором векторного поля $\vec{v}$. В декартовой системе координат оно определяется соотношением:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.



Математическая теорема Стокса гласит:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot}(\vec{v}), d\vec{S}).$$

Циркуляция векторного поля вдоль края ориентированной поверхности равна потоку ротора этого поля через эту поверхность. Направление

касательного вектора $d\vec{l}$ к краю Γ выбирается так, чтобы поверхность оставалась слева при обходе, а нормаль была направлена наружу (правый винт).

Заметим, что теорема Стокса служит основой для формального определения компонент, например вектора $\text{rot} \vec{E}$, безотносительно к выбору системы координат:

$$\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}}{S}.$$

Этим соотношением определяется математический смысл понятия $\text{rot} \vec{E}$. Более удобное математическое соотношение (теорема Грина) связывает между собой интеграл по объёму от ротора произвольного вектора, например $\vec{a}$, и интеграл по замкнутой поверхности, ограничивающей этот объём, от векторного произведения нормали к элементу поверхности на рассматриваемый вектор:

$$\int_V \text{rot} \vec{a} dV = \oint_S \vec{n} \times \vec{a} dS.$$

Из этого соотношение вытекает определение ротора вектора:

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{n} \times \vec{a} dS}{V}.$$

Перепишем числитель дроби в эквивалентной форме

$$\frac{1}{S_0} \oint_{S_0} \vec{n} \times \vec{a} dS \cdot S_0.$$

Теперь можно сформулировать интуитивное определение ротора вектора: это предел отношения произведения среднего по площади контрольной поверхности векторного произведения нормали к поверхности на вектор и площади замкнутой контрольной поверхности к объёму внутри контрольной поверхности при стремлении к нулю объёма внутри контрольной поверхности. Это определение можно использовать для расчета физических компонент ротора произвольного векторного поля $\vec{a}$ в ортогональных криволинейных системах координат. Так в цилиндрической системе координат (r, φ, z) физические составляющие ротора вектора $\vec{a}$ можно получить, раскрывая определитель

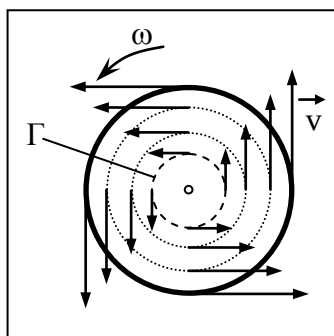
$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & ra_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

Выражение для ротора вектора $\vec{a}$ в сферической системе координат (r, ϑ, φ) имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\vartheta & r \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & ra_\vartheta & r \sin \vartheta \cdot a_\varphi \end{vmatrix}.$$

О правилах раскрытия подобных определителей мы познакомимся на семинарских занятиях.

Смысл ротора можно ещё прояснить следующим примером. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω . Скорость любой точки определяется расстоянием до оси вращения $v = R \cdot \omega$. Вектор скорости любой точки



направлен по касательной к её траектории – окружности с центром на оси вращения. Можно сказать, что на диске задано векторное поле – поле векторов скоростей всех точек $\vec{v}$. Найдём ротор этого поля: $\operatorname{rot}(\vec{v})$. Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (\operatorname{rot}(\vec{v}), d\vec{S}).$$

Если взять малую площадку S , то по теореме о среднем для интеграла можно приближённо записать: $\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) \approx (\operatorname{rot}(\vec{v}))_n \cdot S$, где $(\operatorname{rot}(\vec{v}))_n$ – проекция ротора на нормаль к площадке S .

В качестве кривой Γ возьмём окружность малого радиуса R с центром на оси вращения. Длина этой окружности $2\pi R$, она охватывает площадку S , площадь которой πR^2 . В каждой точке этой окружности вектор скорости направлен по касательной к ней, поэтому угол между малым касательным вектором $d\vec{l}$ и вектором скорости $\vec{v}$ равен нулю. Следовательно

$$(\vec{v}, d\vec{l}) = v \cdot dl.$$

На выбранной окружности Γ величина скорости не меняется: $v = R \cdot \omega = \text{const}$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{v}, d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} v \cdot dl = \omega R \oint_{\Gamma} dl.$$

Интеграл $\oint_{\Gamma} dl = 2\pi R$ равен длине окружности Γ , поэтому циркуляция $\oint_{\Gamma} v \cdot dl = 2\pi \omega R^2$.

Откуда: $2\pi \omega R^2 \approx (\operatorname{rot}(\vec{v}))_n \pi R^2$. После сокращений устремим радиус окружности R к нулю, и получим проекцию ротора на ось вращения:

$$(\operatorname{rot}(\vec{v}))_n = 2\omega.$$

Т.е. ротор векторного поля $\vec{v}$ равен удвоенной угловой скорости вращения точек области, где задано векторное поле. Поэтому иногда ротор также называют вихрем поля. Поля, для которых ротор отличен от нуля, называют вихревыми или соленоидальными. Оказывается, для любого вихревого поля $\vec{v}$ существует некоторое векторное поле $\vec{a}$, такое, что выполняется равенство $\vec{v} = \operatorname{rot}(\vec{a})$.

4) Векторное поле $\vec{v}$, для которого существует непрерывно-дифференцируемая функция Φ такая, что выполняется равенство

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\Phi,$$

называется потенциальным.

Ротор потенциального поля равен нулевому вектору: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \vec{0}$.

Действительно, т.к. $\operatorname{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)$, то

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} \right) = \vec{0}.$$

5) Теорема Остроградского-Гаусса.

Любому векторному полю $\vec{v}$ соответствует функция, называемая дивергенцией этого векторного поля. В декартовой системе координат она определяется соотношением:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Математическая теорема Остроградского-Гаусса гласит:

поток векторного поля через замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, охваченному этой поверхностью:

$$\oint_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) dV.$$

Выше выражение для дивергенции векторного поля $\vec{v}$ записано в декартовой системе координат. С помощью математической теоремы Остроградского-Гаусса выражение для дивергенции векторного поля, например напряжённости $\vec{E}$, можно записать в абстрактной символической форме:

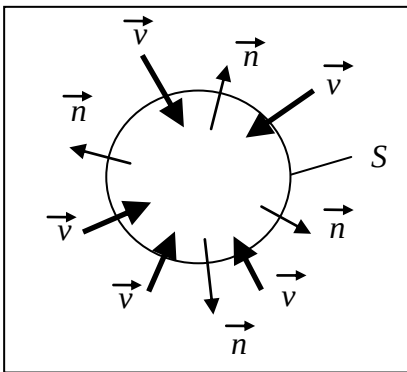
$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS}{V}.$$

Это выражение служит также для установления математического и физического смысла операции дивергенции векторного поля: дивергенция $\vec{E}$ в произвольной точке пространства M равна отношению потока вектора $\vec{E}$ через произвольную бесконечно малую замкнутую поверхность в окрестности точки M к бесконечно малому объёму, ограниченному этой замкнутой поверхностью.

Ещё раз о смысле дивергенции.

Рассмотрим выпуклую поверхность, охватывающую достаточно малый объём. Тогда по теореме о среднем для интеграла $\oint_S (\vec{v}, d\vec{S})$ получим:

$$\oint_S (\vec{v}, d\vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) dV \approx \operatorname{div}(\vec{v}) \cdot V.$$



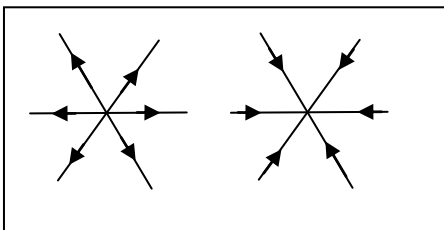
Предположим, что векторное поле втекает внутрь объёма V , т.е. в каждой точке поверхности S векторы $\vec{v}$ направлены против векторов нормалей $\vec{n}$. Поэтому в каждой точке скалярное произведение $(\vec{v}, d\vec{S}) = (\vec{v}, \vec{n}) dS < 0$, т.е. отрицательно.

Тогда интеграл $\oint_S (\vec{v}, d\vec{S}) < 0$. Так как величина объёма $V > 0$, то

$$\operatorname{div}(\vec{v}) \approx \frac{\oint_S (\vec{v}, d\vec{S})}{V} < 0.$$

Говорят, что в этом случае поле имеет внутри поверхности S «сток» - «оно как бы стекает в некоторую дырку».

Если же $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$, то говорят, что у поля есть «источник».



Можно заметить, что в случае стока или источника поля, при стягивании поверхности S в точку, векторное поле становится похожим на картину силовых линий точечных зарядов. В этом случае положительные заряды являются *источниками* электрического поля и для них $\operatorname{div} \vec{E} > 0$.

Отрицательные заряды являются *стоками* электрического поля. Для них $\operatorname{div} \vec{E} < 0$.

Электрические заряды принято называть просто *источниками* (положительными и отрицательными) электрического поля.

Таким образом, силовые линии электростатического поля не являются непрерывными линиями – они имеют начало и конец.

Вихревое электрическое поле $\vec{v}$ не имеет источников. Действительно, в этом случае

существует некоторое поле $\vec{a}$, такое, что $\vec{v} = \text{rot}(\vec{a})$, поэтому (доказательство проведём в декартовой системе координат):

$$\text{div}(\vec{v}) = \text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_x}{\partial x} + \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_y}{\partial y} + \frac{\partial(\text{rot}(\vec{a}))_z}{\partial z}.$$

Но

$$\text{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Так как вихревое поле не имеет источников, то его силовые линии нигде не разрываются, т.е. они непрерывные и замкнутые.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Работа, совершаемая силами поля при относительном изменении положения двух зарядов, равна:

$$A = W_{\text{ПОТ_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ_КОН}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{НАЧ}}} - k \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{\text{КОН}}}.$$

Пусть теперь один заряд $q_1 = Q$ закреплён неподвижно, так что перемещаться будет второй заряд $q_2 = q$, поэтому выражение для работы примет вид:

$$A = W_{\text{ПОТ_НАЧ}} - W_{\text{ПОТ_КОН}} = k \frac{qQ}{R_{\text{НАЧ}}} - k \frac{qQ}{R_{\text{КОН}}} = q \left(k \frac{Q}{R_{\text{НАЧ}}} - k \frac{Q}{R_{\text{КОН}}} \right).$$

Энергетическая характеристика электростатического поля – отношение энергии взаимодействия точечного заряда с полем W к величине этого заряда q называется потенциалом поля в данной точке:

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Единица измерения потенциала: Вольт (В). 1 В = 1 Дж/ 1 Кл.

Таким образом, если поле создается точечным зарядом Q , то на расстоянии R от него потенциал определяется по формуле ($C=0$):

$$\varphi = \frac{W}{q} = k \frac{Q}{R}.$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда q можно записать в виде:

$$A = q(\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}).$$

Т.е. *разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда:*

$$\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} = \frac{A_{\text{кул}}}{q}.$$

В частности, если заряд q удаляется от заряда Q на очень большое расстояние ($R_{\text{кон}} = \infty$), то

$$A = k \frac{qQ}{R_{\text{нач}}} = q\varphi_{\text{нач}},$$

где $\varphi_{\text{нач}} = k \frac{Q}{R_{\text{нач}}}$. Тогда потенциал данной точки поля можно определить как *отношение работы сил поля по перемещению заряда q из данной точки поля на очень большое расстояние (говорят «на бесконечность») к величине этого заряда.*

Поверхности в пространстве, на которых потенциал остается постоянным, называются эквипотенциальными поверхностями.

Силовые линии направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в каждой их точке.

СВЯЗЬ НАПРЯЖЁННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА.

Так как энергия взаимодействия точечного заряда с электростатическим полем и сила, действующая на этот заряд со стороны поля, связаны соотношением $\vec{F} = -\text{grad}(W_{\text{пот}})$, то из определений получаем: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{1}{q} \text{grad}(W_{\text{пот}}) = -\text{grad}\left(\frac{W_{\text{пот}}}{q}\right) = -\text{grad}(\varphi).$

Таким образом, связь между напряжённостью и потенциалом электростатического поля дается выражением (в дифференциальной форме):

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi).$$

Следовательно, электростатическое поле является потенциальным полем.

Из свойств оператора $\text{grad}(\phi)$ следует, что вектор напряжённости электрического поля направлен в сторону наибольшего убывания потенциала, перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.

Работа сил электрического поля

$$A_{\text{КУЛ}} = \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (\vec{F}_{\text{КУЛ}}, d\vec{l}) = \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (q \cdot \vec{E}, d\vec{l}) = q \cdot \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (\vec{E}, d\vec{l})$$

В то же время $A_{\text{КУЛ}} = q(\phi_{\text{НАЧ}} - \phi_{\text{КОН}})$.

Сравниваем эти выражения и получаем:

$$\phi_{\text{НАЧ}} - \phi_{\text{КОН}} = \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Если обозначить изменение потенциала как $\Delta\phi = \phi_{\text{КОН}} - \phi_{\text{НАЧ}}$ (НЕ ПУТАЙТЕ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА!), то получим связь напряжённости и потенциала в интегральной форме

$$\Delta\phi = - \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Из этого выражения следует **теорема о циркуляции для электростатического поля:**

Для любой замкнутой траектории (любой кривой линии) Γ , находящейся в области пространства, где создано электростатическое поле, значение интеграла $\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l})$ вдоль этой замкнутой линии Γ всегда равно нулю: $\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$.

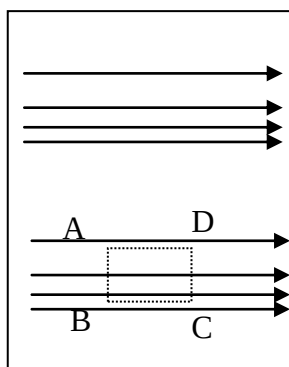
Действительно, в случае, когда точечный заряд перемещается вдоль какой-то замкнутой траектории Γ , выполняется равенство: $\phi_{\text{КОН}} = \phi_{\text{НАЧ}}$, поэтому

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\text{НАЧ}}^{\text{КОНЕЦ}} (\vec{E}, d\vec{l}) = -\Delta\phi = \phi_{\text{НАЧ}} - \phi_{\text{КОН}} = 0.$$

Из теоремы Стокса следует **дифференциальная форма теоремы о циркуляции:**

т.к. электростатическое поле потенциальное, то его ротор равен нулевому вектору в каждой точке:

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$



Пример. Можно ли создать неоднородное электростатическое поле, силовые линии которого параллельны друг другу?

В электростатическом поле для любого замкнутого контура Γ выполняется равенство: $\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$. Если возьмём в качестве контура Γ прямоуголь-

ник ABCD, то интеграл можно разбить на 4 интеграла вдоль сторон этого прямоугольника:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Но на сторонах AB и CD векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ перпендикулярны друг другу, т.е. $(\vec{E}, d\vec{l}) = 0$, поэтому $\int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$ и $\int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$.

На стороне BC векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ направлены одинаково, на стороне DA направлены противоположно, откуда

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} E \cdot (\cos 0^\circ) \cdot dl + \int_{DA} E \cdot (\cos 180^\circ) \cdot dl = \int_{BC} E dl - \int_{DA} E dl.$$

Вблизи стороны BC силовые линии расположены гуще, чем вблизи стороны DA, поэтому

$E_{BC} > E_{DA}$, следовательно

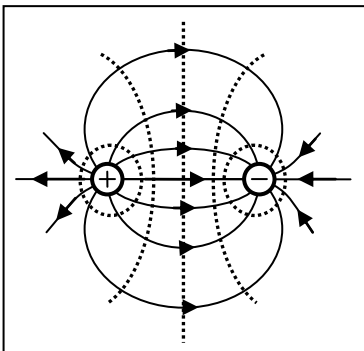
$$\oint_{\Gamma} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{BC} E dl - \int_{DA} E dl = E_{BC} \cdot |BC| - E_{DA} \cdot |DA| \neq 0.$$

То есть для такого поля не выполняется теорема о циркуляции. ♣

Из принципа суперпозиции следует

$$\vec{E}_{\Sigma} = \sum_i \vec{E}_i = - \sum_i \text{grad}(\phi_i) = - \text{grad} \left(\sum_i \phi_i \right) = - \text{grad}(\phi_{\Sigma}),$$

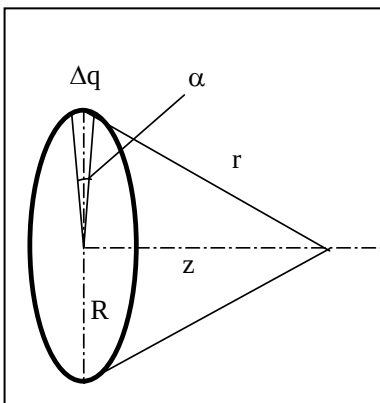
$$\text{т.е. } \phi_{\Sigma} = \sum_i \phi_i.$$



Принцип суперпозиции для потенциала: потенциал в данной точке поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов поля, создаваемых каждым из зарядов

в отдельности.

Пример. Рассмотрим электростатическое поле, создаваемое заряженным кольцом, радиус которого R . Найдём потенциал на оси кольца на расстоянии z от плоскости кольца.



Решение. Разобьём кольцо на большое количество N участков, опирающихся на центральный угол $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. (Длина одного участка

$L = \frac{2\pi R}{N}$.) Заряд одного участка $q = \frac{Q}{N}$, где Q – заряд

кольца. Будем считать, что $Q > 0$. Принимая малый участок коль-

ца за точечный заряд, можно найти потенциал поля на оси кольца, создаваемого одним участком: $\varphi_\alpha = k \frac{q}{r}$, где $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции, суммарный потенциал будет равен:

$$\varphi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} = \sum_{\alpha} k \frac{q}{r} = \sum_{\alpha} k \frac{Q/N}{r} = Nk \frac{Q/N}{r} = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Из этой формулы видно, что потенциал в центре кольца ($z=0$) равен: $\varphi = k \frac{Q}{R}$. ♣

Энергия системы зарядов равна сумме энергий попарных взаимодействий:

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij}.$$

Здесь множитель $\frac{1}{2}$ учитывает, что одна и та же пара индексов встречается в этом выражении два раза - один раз как (ij) , а второй раз как (ji) .

Запишем это выражение через потенциалы:

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \varphi_j \right).$$

Последнее выражение включает в себя сумму потенциалов полей $\sum_{j \neq i} \varphi_j$, создаваемых всеми зарядами, за исключением номера i , в том месте, где находится заряд с номером i .

Пример. Найдем энергию взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 .

В точке, где находится заряд q_1 , второй заряд создаёт потенциал $\varphi_2 = k \frac{q_2}{R}$. В точке, где находится заряд q_2 , первый заряд создаёт потенциал $\varphi_1 = k \frac{q_1}{R}$. Тогда

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_2 + q_2 \varphi_1) = \frac{1}{2} \left(q_1 k \frac{q_2}{R} + q_2 k \frac{q_1}{R} \right) = k \frac{q_1 q_2}{R}. \clubsuit$$

Очень часто распределение зарядов в пространстве можно задать с помощью функции, называемой плотностью распределения.

1) Объёмная плотность распределения $\rho(x, y, z)$ (единицы измерения Кл/м³). Тогда суммарный заряд объёма: $Q = \iiint_V \rho dV$. Энергию взаимодействия некоторого точечного за-

ряда q с заряженным телом можно определить следующим образом: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iiint_V \frac{\rho}{r} dV$,

где r – расстояние от точечного заряда q до точки, где задана плотность $\rho(x, y, z)$.

- 2) Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma(x, y, z)$ (единицы измерения Кл/м²).

Тогда суммарный заряд поверхности: $Q = \iint_S \sigma dS$. Энергия взаимодействия некоторого

точечного заряда q с заряженной поверхностью: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iint_S \frac{\sigma}{r} dS$, где r – расстояние

от точечного заряда q до точки, где задана плотность $\sigma(x, y, z)$.

- 3) Линейная плотность распределения заряда $\lambda(x, y, z)$ (Единицы измерения Кл/м). Тогда

суммарный заряд кривой линии: $Q = \int_{\Gamma} \lambda dl$. Энергия взаимодействия некоторого точеч-

ного заряда q с заряженной линией: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{r} dl$, где r – расстояние от точечного

заряда q до точки, где задана плотность $\lambda(x, y, z)$.