Лекция 2. **Теорема Гаусса для электростатического поля**.

Поток вектора напряжённости электрического поля. Теорема Гаусса в интегральной и дифференциальной формах в вакууме и её применение для расчёта электрических полей. Уравнение Пуассона.

Потоком вектора напряжённости $\vec{E}$ электрического поля через ориентированную поверхность S называется величина

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right).$$

Единица измерения потока $\left[\Phi_{\vec{E}}\right]$ – В·м.

Теорема Гаусса для напряжённости электростатического поля в вакууме в интегральной форме.

Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью, делённой на ε_0.

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}.$$

Если ввести функцию объёмного распределения электрического заряда $\rho(x,y,z)$, такую, что

$$\iiint_V \rho dV = \sum_i q_i ,$$

и воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса $\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \iiint_V div\left(\vec{E}\right) dV$, то из равенства

$$\iiint_V div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

получим дифференциальную форму теоремы Гаусса:

$$div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

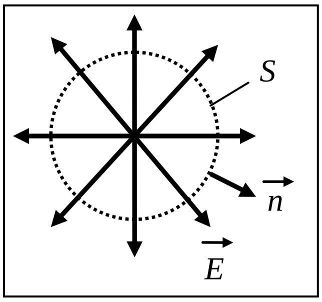
Смысл этого равенства в том, что ***источником электростатического поля являются электрические заряды*****.** Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных и оканчиваются на отрицательных зарядах.

Примеры применения теоремы Гаусса.

Теорему Гаусса удобно применять для определения напряжённости поля в случаях, когда картина силовых линий обладает какой-либо симметрией.

1) *Поле точечного заряда q.*

Пусть q >0. Возьмём в качестве поверхности S сферу радиусом R с центром в месте нахождения заряда. На поверхности сферы вектор $\vec{E}$ сонаправлен с вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности сферы, поэтому $\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=EdS$. В каждой точке поверхности сферы модуль вектора $\vec{E}$ равен:



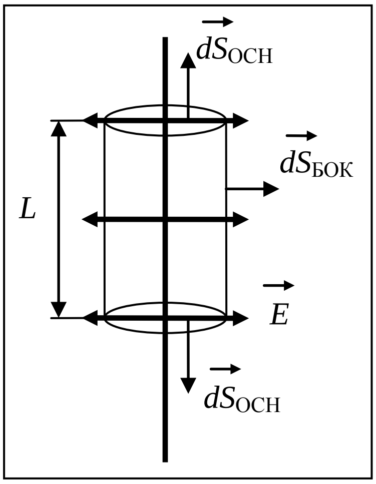
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}=const\,.$$

$$\oint\limits_S\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\oint\limits_S EdS=E\oint\limits_S dS=ES\,.$$

Так как площадь поверхности сферы $S=4\pi R^2$, то поток вектора напряжённости $\vec{E}$ в соответствии с теоремой Гаусса будет равен:

$$\oint\limits_S\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

2) *Поле бесконечной прямой заряженной нити*. Пусть нить заряжена с линейной плотностью заряда $\lambda>0$.



Как мы уже знаем, силовые линии поля направлены перпендикулярно нити и картина поля в целом обладает осевой симметрией относительно нити.

Найдем поток вектора напряжённости через поверхность прямого цилиндра радиуса R и высоты L, ось которого совпадает с осью цилиндра.

$$\oint\limits_{\text{ЦИЛИНДР}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{\text{ОСНОВАНИЯ}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)+\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)$$

На основаниях цилиндра векторы $d\vec{S}\perp\vec{E}$, поэтому поток через основания: $\iint\limits_{\text{ОСНОВАНИЯ}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=0$.

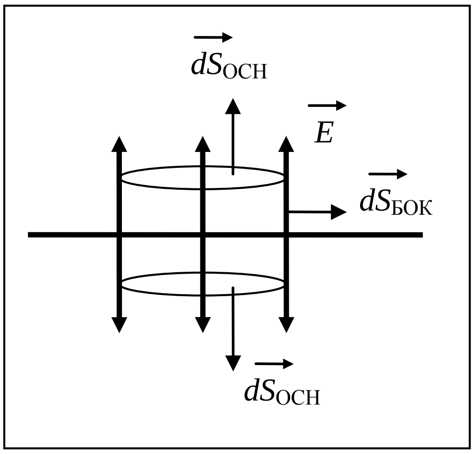
На боковой поверхности $d\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{E}$, поэтому $\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}EdS$.

Т.к. картина поля осесимметрична, то величина E зависит только от расстояния до нити, поэтому на боковой поверхности этого цилиндра величина E=const.

$$\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}\left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}EdS=E\iint\limits_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}dS=ES_{\substack{\text{БОКОВАЯ}\\ \text{ПОВЕРХНОСТЬ}}}=E2\pi RL\,.$$

По теореме Гаусса: $\oint\!\!\oint_S \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\dfrac{q_{ВНУТР}}{\varepsilon_0}$, где $q_{ВНУТР}$ - заряд, охваченный поверхностью S. Но внутри цилиндра находится часть нити длиной L, поэтому $q_{ВНУТР}=\lambda\cdot L$. Тогда $E2\pi RL=\dfrac{\lambda\cdot L}{\varepsilon_0}$ и для величины E получаем: $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$.

3) *Поле бесконечной заряженной плоскости.* Пусть поверхностная плотность заряда σ>0.



Картина силовых линий симметрична относительно плоскости. Найдём поток вектора $\vec{E}$ через поверхность прямого цилиндра, основания которого параллельны плоскости, и расположенного так, что плоскость делит цилиндр пополам.

$$\oint\!\!\oint_{ЦИЛИНДР} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\iint_{ОСНОВАНИЯ} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)+\iint_{\substack{БОКОВАЯ\\ПОВЕРХНОСТЬ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right).$$

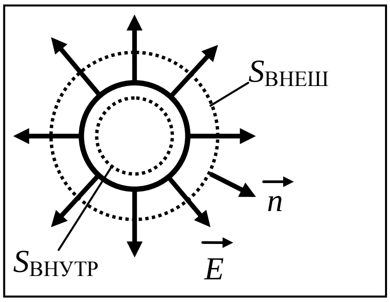
Заметим, что поток вектора $\vec{E}$ через поверхность прямого цилиндра можно разделить на две части: на поток через основания и поток через боковую поверхность. Тогда $\iint_{\substack{БОКОВАЯ\\ПОВЕРХНОСТЬ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=0$. На основаниях величина E будет одинаковой:

$$\iint_{ОСНОВАНИЯ} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=2ES_{ОСНОВАНИЕ}.$$

Величина заряда внутри цилиндра $q=\sigma\cdot S_{ОСНОВАНИЕ}$.

Поэтому по теореме Гаусса имеем: $2ES_{ОСНОВАНИЕ}=\dfrac{\sigma\cdot S_{ОСНОВАНИЕ}}{\varepsilon_0}$, откуда $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

4) *Поле тонкостенной (полой) заряженной сферы.*



Картина силовых линий обладает центральной симметрией относительно центра сферы, поэтому величина напряжённости поля зависит только от расстояния до центра сферы.

Сначала в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность, находящуюся внутри сферы:

$$\oint\!\!\oint_{S_{ВНУТР}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right)=\oint\!\!\oint_{S_{ВНУТР}} EdS=E\oint\!\!\oint_{S_{ВНУТР}} dS=ES_{ВНУТР}.$$

Но внутри сферы зарядов нет, поэтому $ES_{ВНУТР}=0$. Таким образом, напряжённость поля внутри сферы равна нулю: $E=0$.

Теперь в качестве поверхности рассмотрим концентрическую сферическую поверхность радиуса *R*, охватывающую сферу. Тогда

$$\oiint_{S_{ВНЕШ}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = \oiint_{S_{ВНЕШ}} EdS = E \oiint_{S_{ВНЕШ}} dS = ES_{ВНЕШ}\,.$$

Эта поверхность охватывает сферу целиком, поэтому $ES_{ВНЕШ} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

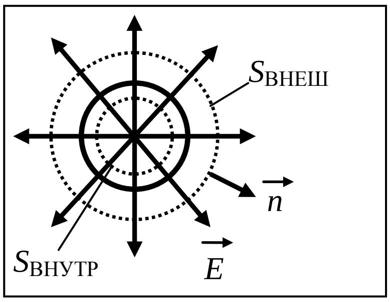
$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S_{ВНЕШ}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

5) Поле, создаваемое полым бесконечным заряженным цилиндром радиуса R.

Картина силовых линий симметрична относительно оси цилиндра.

Внутри цилиндра $E = 0$, а снаружи $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, где λ - линейная плотность заряда цилиндра, r - расстояние от оси цилиндра. Если для цилиндра задана поверхностная плотность заряда σ, то, т.к. заряд куска цилиндра длиной L равен: $q = \lambda L = \sigma 2\pi RL$, откуда получаем $\lambda = \sigma 2\pi R$, поэтому

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R}{r}.$$



6) Поле, создаваемое шаром радиуса R и заряженным равномерно зарядом q. Картина силовых линий обладает центральной симметрией. Выделим внутри шара сферу радиуса r с центром, совпадающим с центром шара. Тогда

$$\oiint_{S_{ВНУТР}} \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = ES_{ВНУТР} = \frac{q_{ВНУТР}}{\varepsilon_0}.$$

Заряд внутри сферы $q_{ВНУТР} = \dfrac{q}{V_{ШАР}} V_{ВНУТР}$, где объём шара $V_{ШАР} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, объём внутри сферы $V_{ВНУТР} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, площадь поверхности внутренней сферы $S_{ВНУТР} = 4\pi r^2$. Тогда

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{поэтому внутри шара} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r.$$

Замечание. Это равенство можно записать в векторном виде $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор из центра шара.

Снаружи шара картина поля аналогична уже разобранному полю заряженной сферы:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

На поверхности шара величина напряжённости – непрерывная.

Уравнение Пуассона

Общая задача электростатики состоит в том, чтобы по распределению зарядов в пространстве определить потенциал φ и, следовательно, напряжённость поля $\vec{E}$.

Из соотношений $\vec{E} = -grad\varphi$ и $div\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ получаем соотношение:

$$div\left(grad\varphi\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

описывающее распределение потенциала по заданному распределению заряда.
В декартовой системе координат

$$div\left(grad\varphi\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi,$$

(Δ - оператор Лапласа), поэтому уравнение принимает вид $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Это ***уравнение Пуассона***.

При отсутствии зарядов (ρ=0) получаем ***уравнение Лапласа:*** $\Delta\varphi = 0$.

При решении подобной задачи необходимо задать граничные условия – значения потенциала или напряжённости на границе рассматриваемой области.