

Лекция 3. Электростатическое поле в диэлектрике.

Электрический диполь в электростатическом поле. Поляризация диэлектриков. Электростатическое поле в диэлектрике. Поляризованность. Свободные и связанные заряды. Связь поляризованности с плотностью связанных зарядов. Вектор электрического смещения. Обобщение теоремы Гаусса. Поле на границе раздела диэлектриков.

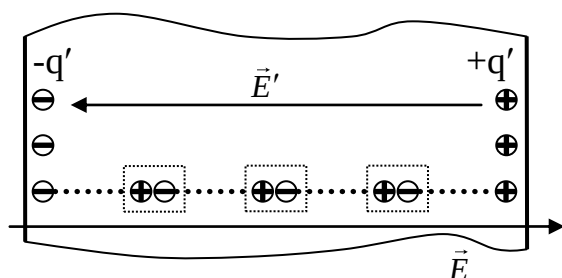
Все вещества состоят из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц. Эти заряженные частицы находятся в постоянном движении, поэтому при классическом описании их движения будут рассматриваться усреднённые по времени величины. Если в веществе есть электрические заряды, которые способны относительно свободно перемещаться в пределах тела даже под действием слабого электрического поля, то такие вещества относятся к так называемому классу проводников. Соответственно, вещества, в которых нет «свободно» движущихся зарядов (при обычных условиях), относятся к диэлектрикам.

Замечание. Это деление на классы проводников и диэлектриков весьма условно. Некоторые вещества, являющиеся проводниками в определённых условиях, становятся диэлектриками в других, и наоборот.

Рассмотрим поведение диэлектриков в электрическом поле.

Заряды, не входящие в состав вещества, будем называть сторонними (но они могут находиться и внутри вещества). Эти заряды создают электрическое поле, которое будем называть внешним.

В диэлектрике при нормальных условиях нет свободно движущихся носителей зарядов. Все заряды, из которых состоит диэлектрик, связаны друг с другом. Их называют связанными. Электрические заряды образуют молекулы. Если в отсутствии внешнего электрического поля электрические заряды в молекуле пространственно разделены, то молекула называется полярной, в противном случае – неполярной.

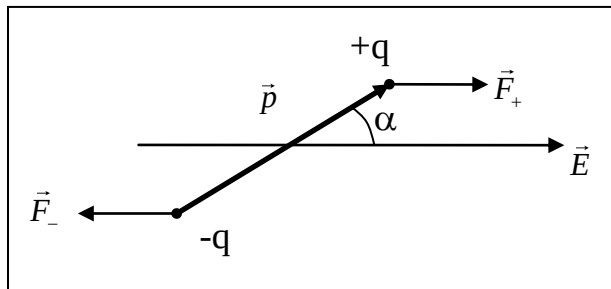


Во внешнем электрическом поле неполярная молекула вытягивается вдоль силовой линии поля, а полярная разворачивается. Можно приближённо считать, что крайние связанные заряды двух соседних диполей в глубине диэлектрика взаимно компенсируются, но заряды, расположенные вблизи поверхности диэлектрика ничем не скомпенсированы. Эти некомпенсированные заряды создают дополнительное

электрическое поле внутри диэлектрика, которое изменяет внешнее поле. Это явление разделения связанных зарядов и появления дополнительного поля называется поляризацией диэлектрика. Поэтому при поляризации диэлектрика электростатическое поле внутри диэлектрика изменяется за счёт поля связанных зарядов. Обычно поле связанных зарядов уменьшает поле свободных зарядов в диэлектрике.

Теперь опишем поляризацию количественно.

В простейшем случае молекулу можно представить как два одинаковых по ве-



личине, но противоположных по знаку заряда. Такая система зарядов называется диполем. Электрическим дипольным моментом называется векторная величина $\vec{p} = q\vec{L}$, где q – величина заряда,

L – расстояние между зарядами (плечо диполя). (Единица измерения Кл·м). Вектор электрического дипольного момента $\vec{p}$ диполя направлен от отрицательного заряда к положительному заряду.

На диполь, помещённый в однородное электростатическое поле $\vec{E} = \text{const}$, будет действовать пара сил $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$. Учитывая, что $|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = F = qE$ найдём модуль момента сил, действующих на диполь:

$$M = F_+ L \sin \alpha = qEL \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

Эту зависимость можно переписать в векторном виде: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Из последних соотношений следует, что $M = 0$, если $\alpha = 0$ (положение устойчивого равновесия) или $\alpha = \pi$ (положение неустойчивого равновесия). Следовательно, электростатическое поле стремится развернуть свободный электрический диполь так, чтобы его электрический момент $\vec{p}$ установился по направлению напряжённости электрического поля $\vec{E}$.

В неоднородном поле силы $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$, действующие на заряды $+q$ и $-q$ диполя, в общем случае будут отличаться по величине. В неоднородном поле поведение диполя зависит от угла α . Для угла $\alpha < \frac{\pi}{2}$ направление результирующей силы, действующей на диполь со стороны электрического поля, таково, что диполь втягивается в область более сильного поля. При $\alpha > \frac{\pi}{2}$ диполь выталкивается из электрического поля.

В отсутствие внешнего поля в диэлектрике с полярными молекулами диполи ориентированы хаотически. В диэлектрике, находящемся в электростатическом поле, в состоянии равновесия диполи преимущественно расположены вдоль поля.

Рассмотрим в диэлектрике некоторый физически малый объём величиной ΔV . Введём вектор поляризованности вещества:

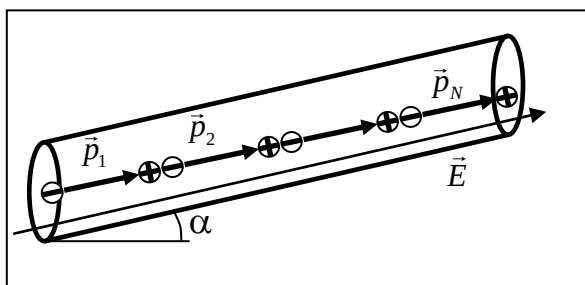
$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V},$$

где $\vec{p}_i$ - дипольный момент отдельной молекулы из общего числа N молекул малого объёма ΔV . Поляризованность является количественной мерой поляризации диэлектрика. Эта векторная характеристика $\vec{P}$ определяет электрический дипольный момент единицы объёма диэлектрика вблизи некоторой выделенной точки в объёме ΔV диэлектрика. Единица измерения P : Кл/м². В однородном изотропном диэлектрике этот вектор направлен параллельно вектору напряжённости $\vec{E}$, поэтому можно записать:

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$$

Безразмерный параметр ϵ называется коэффициентом поляризуемости или диэлектрической восприимчивостью вещества.

Поляризация диэлектрика приводит к появлению на его поверхности связанных зарядов с некоторой поверхностной плотностью σ' заряда. Эту величину можно связать с поляризованностью. Для этого рассмотрим тонкий косой цилиндр (слой диэлектрика) с площадью основания S , ось которого параллельна вектору напряжённости $\vec{E}$ внешнего поля. Для модуля вектора поляризованности в соответствии с определением можно записать:



$$|\vec{P}| = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{Nq'L}{SNL \cos \alpha} = \frac{q'}{S \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}$$

где q' - величина связанного заряда, L -

плечо диполя, α - угол между вектором поляризованности $\vec{P}$ и внешней нормалью $\vec{n}$ к поверхности диэлектрика со связанным зарядом. Обратите внимание: величина вектора $\vec{P}$ не зависит от количества суммируемых диполей - она определяется только поверхностной плотностью связанного заряда. Отсюда для нормальной составляющей вектора поляризованности на поверхности диэлектрика получаем следующее соотношение:

$$P_n = |\vec{P}| \cos \alpha = \sigma'.$$

Нормальная составляющая вектора поляризованности равна поверхностной плотности связанного заряда. Знак поверхностной плотности поляризационного (связанного) заряда определяется знаком $\cos \alpha$. Так на правом основании косого цилиндра из диэлектрика $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$ и $\sigma' > 0$. На левом основании всё наоборот.

Теперь найдём поток вектора поляризованности через некоторую малую поверхность S :

$$\Phi_p = \iint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = \iint_S |\vec{P}| dS \cos \alpha \approx P \cos \alpha \cdot S = \sigma' S = q'.$$

Таким образом, *поток вектора поляризованности через некоторую малую площадку равен величине связанного заряда, определяющего этот вектор.*

Заметим, что в случае неоднородной поляризации диэлектрика связанные заряды появляются не только на поверхности диэлектрика, но и в его объёме с некоторой объёмной плотностью ρ' заряда. Рассмотрим поток вектора поляризованности через некоторую замкнутую ориентированную поверхность S внутри диэлектрика. Предположим, что вектор поляризованности направлен наружу, т.е. в объёме, ограниченном этой поверхностью S , суммарный связанный заряд отрицательный. Тогда, учитывая, что поток вектора $\vec{P}$ положительный, а заряд отрицательный имеем:

$$\oiint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -q',$$

где $q' = \int_V \rho' dV$. Полученное интегральное соотношение позволяет определить связанный поляризационный заряд q' в объёме V неоднородно поляризованного диэлектрика, ограниченного замкнутой поверхностью S .

Это теорема Гаусса для вектора поляризованности в интегральной форме. Соответственно, в дифференциальной форме эта теорема принимает вид:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'.$$

Запишем теорему Гаусса для вектора напряжённости $\vec{E}$ электростатического поля внутри диэлектрика:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho'}{\epsilon_0},$$

(здесь указано, что электрическое поле создаётся сторонними зарядами с объёмной плотностью ρ и связанными зарядами с объёмной плотностью ρ'). Умножим обе части последнего соотношения на ε_0 и получим:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_{\text{св}} + \rho' = \rho_{\text{св}} - \operatorname{div} \vec{P},$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{св}}.$$

Введём новый вектор $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

который называется вектором **электрического смещения** или **вектором электрической индукции**. Следовательно, из теоремы Гаусса для вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ следует теорема Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{св}}.$$

Это теорема Гаусса для электрического поля в веществе (в дифференциальной форме).

Сформулируем теорему Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$ в интегральной форме: **поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью:**

$$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

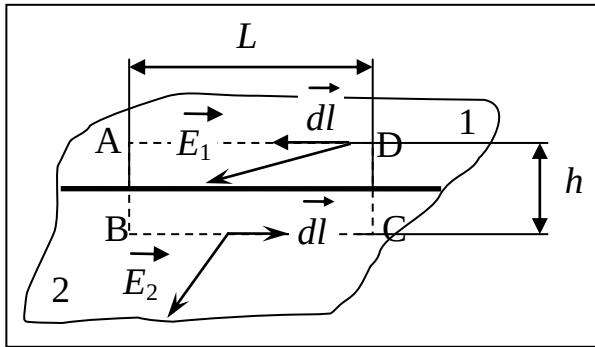
В однородном изотропном диэлектрике $\vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$, поэтому

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon + 1) \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Если ввести величину $\varepsilon = \varepsilon + 1$, которую называют **(относительной) диэлектрической проницаемостью вещества**, то для вектора смещения $\vec{D}$ внутри однородного изотропного диэлектрика получим:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Замечание. Для вакуума $\varepsilon = 1$ (отсутствие вещества, поэтому $\varepsilon = 0$). Для воздуха при условиях незначительно отличающихся от нормальных также $\varepsilon \approx 1$.

Поле на границе раздела диэлектриков.

Рассмотрим поле на плоской границе раздела (в случае неплоской границы достаточно рассмотреть малый участок).

Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряжённости в интегральной форме:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник ABCD размером $L \times h$, расположенный таким образом, что одна его сторона DA находится в первом диэлектрике, вторая сторона BC – во втором, а граница делит прямоугольник пополам.

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{AB} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{CD} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

При устремлении $h \rightarrow 0$ значения второго и четвёртого интегралов стремятся к нулю.

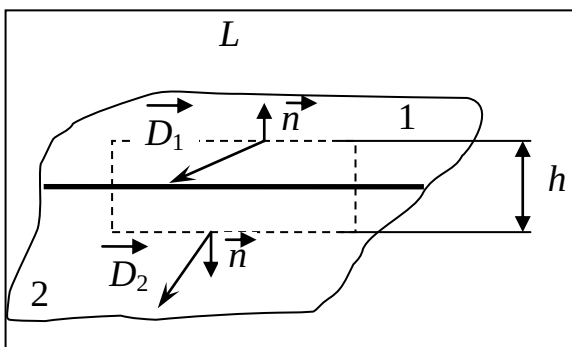
Но $(\vec{E}, d\vec{l}) = E_t dl$, где E_t – касательная составляющая вектора напряжённости.

Поэтому

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) \approx \int_{DA} (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_{BC} (\vec{E}, d\vec{l}) = E_{1t} L - E_{2t} L = 0.$$

В результате получаем: $E_{1t} = E_{2t}$

На границе раздела диэлектриков величина касательной составляющей вектора напряжённости электрического поля не меняется.



Теперь применим теорему Гаусса в веществе:

$$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем прямой цилиндр высотой h , основания которого (площадью S каждое) параллельны границе раздела. Пусть граница раздела делит пополам цилиндр. Тогда получим:

$$\oiint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \iint_{S_{\text{ОСН}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{ОСН}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{\text{БОК}}} (\vec{D}, d\vec{S}) = q.$$

Учтем, что $(\vec{D}, d\vec{S}) = (\vec{D}, \vec{n}) dS = D_n dS$, где D_n – нормальная составляющая вектора смещения. Если высота цилиндра стремится к нулю: $h \rightarrow 0$, то интеграл по боковой поверхности цилиндра стремится к нулю, поэтому

$$\iint_{S_{\text{лоси}}} (\vec{D}, d\vec{S}) + \iint_{S_{2\text{оси}}} (\vec{D}, d\vec{S}) \approx -D_{1n} S + D_{2n} S.$$

В пределе, получаем:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Изменение величины нормальной составляющей вектора смещения на границе раздела диэлектриков равно плотности стороннего заряда на границе.

Если на границе нет сторонних зарядов ($\sigma=0$), то нормальная составляющая вектора смещения не меняется: $D_{2n} = D_{1n}$.

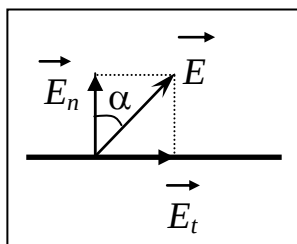
Если рассмотреть теорему Гаусса для вектора поляризованности в интегральной форме:

$$\oiint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -q',$$

то можно, по аналогии, записать:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'.$$

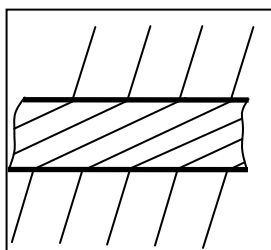
Изменение величины нормальной составляющей вектора поляризованности на границе раздела диэлектриков равно с обратным знаком поверхностной плотности связанного заряда.



Соотношения на границе раздела диэлектриков (при отсутствии сторонних зарядов) можно переписать в виде: $\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$, $E_{1t} = E_{2t}$. Если ввести угол отклонения силовой линии от нормали к границе раздела: $\text{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n}$, то для углов по разные стороны от границы получим:

роны от границы получим:

$$\frac{\text{tg} \alpha_2}{\text{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \frac{E_{1n}}{E_{1t}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$



При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ получаем $\alpha_2 > \alpha_1$ – в диэлектрике с большей относительной проницаемостью силовые линии больше отклоняются от вертикального направления.

Т.е. в диэлектрике силовые линии электрического поля сгущаются. Говорят, что диэлектрик «накапливает силовые линии».