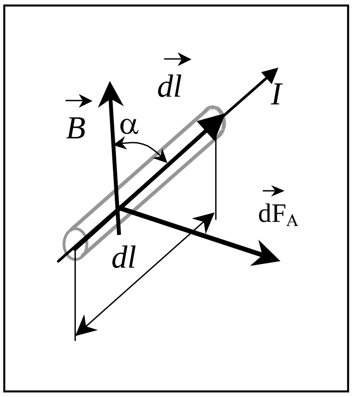
Лекции 7. Проводники с током в магнитном поле. Теорема Гаусса для магнитного поля.

Закон Ампера. Магнитный момент контура с током. Контур с током в магнитном поле. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

СИЛА АМПЕРА



Магнитное поле проявляется по силовому воздействию на проводники с током. Такая сила была впервые определена А. Ампером в 1820 году при экспериментальном исследовании силового взаимодействия проводников с токами. Опыт показывает, что на прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле действует сила, зависящая от силы тока, индукции магнитного поля, длины проводника и положения проводника относительно силовых линий магнитного поля. Эта сила называется ***силой Ампера*.**

Если рассмотреть малый участок тонкого проводника длиной dl, по которому течёт ток силой I, то в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на него будет действовать сила, вектор которой определяется законом Ампера:

$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Здесь, как и ранее, $d\vec{l}$ - это вектор, направленный по касательной к линии тока в положительном направлении для тока, длина этого вектора равна длине элемента проводника. Из этого закона следует, что сила $d\vec{F}_A$ направлена перпендикулярно плоскости, в которой располагаются векторы $d\vec{l}$ и $\vec{B}$, и если смотреть на эту плоскость с конца вектора $d\vec{F}_A$, то вектор $d\vec{l}$ должен вращаться по кратчайшему пути к вектору $\vec{B}$ против часовой стрелки. Векторы $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F}_A)$ образуют правую тройку векторов. Модуль силы $dF_A = IBdl\sin\alpha$, где α - угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$. ***Закон Ампера*: *сила* $d\vec{F}_A$*, действующая на элемент* $Id\vec{l}$ *линейного проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на магнитную индукцию поля.***

Результирующую силу, действующую на линейный проводник L с током, можно определить, суммируя силы, действующие на все элементы этого проводника:

$$\vec{F} = \int_L I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right],$$

откуда , в частности, следует, что в однородном магнитном поле ($\vec{B}$=const) сила, действующая на прямой проводник длиной l с током I, будет равна:

$$\vec{F} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right],$$

где направление вектора $\vec{l}$ определяется направлением тока в прямом проводнике. В рассматриваемом случае модуль силы $\vec{F}$ можно вычислить по формуле:

$$\vec{F} = IlB\sin\alpha,$$

где α - угол между направлением вектора $\vec{l}$ и индукцией магнитного поля.

Зависимость $\vec{F} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right]$ можно вывести теоретически. Попробуем сделать это! Вспомним , что электрический ток представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц, а в магнитном поле на движущиеся заряженные частицы действует магнитная сила Лоренца: $\vec{F}_q = q\left[<\vec{v}>\times\vec{B}\right]$. Найдём векторную сумму этих сил для прямолинейного тонкого проводника длиной l.

Рассмотрим проводник, который покоится в некоторой системе отсчёта. Пусть площадь поперечного сечения проводника равна $S_\perp$. Так как проводник тонкий, то плотность тока вдоль поперечного сечения проводника можно считать постоянным вектором: $\vec{j} = qn<\vec{v}>$, где $<\vec{v}>$ – вектор средней скорости упорядоченного движения носителей тока, а n - их концентрация. Сила тока в проводнике: $I = jS_\perp = qn<v>S_\perp$. На каждый носитель тока действует одинаковая магнитная сила Лоренца: $\vec{F}_q = q\left[<\vec{v}>\times\vec{B}\right]$. Количество носителей тока в объёме проводника длиной l и площадью поперечного сечения $S_\perp$ равно $N = nS_\perp l$. Для линейного тонкого проводника (с малым поперечным сечением) справедливо соотношение:

$$\vec{j}S_\perp l = jS_\perp\vec{l} = I\vec{l}.$$

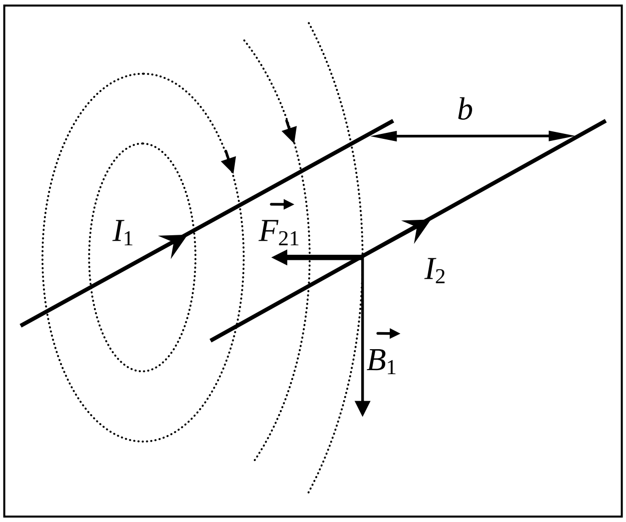
Найдём вектор суммарной силы для всех N носителей:

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k = N\vec{F}_q = nS_\perp lq\left[<\vec{v}>\times\vec{B}\right] = qnS_\perp<v>\left[\vec{l}\times\vec{B}\right] = I\left[\vec{l}\times\vec{B}\right].$$

Замечание. В металлическом проводнике носителями тока являются отрицательно заряженные электроны. Хоть электроны и движутся против положительного направления для тока, но вектор магнитной силы Лоренца, действующей на них, направлен так же, как если бы носители тока были положительно заряженными частицами.

Полученное выражение для суммарной силы совпадает с выражением для силы Ампера, действующей на прямолинейный проводник длиной l с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Таким образом, можно сказать, что ***сила Ампера – это суммарная магнитная сила Лоренца, действующая на носители тока <u>в покоящемся проводнике</u>***.

Пример. Найдем величину силы взаимодействия (на единицу длины) двух бесконечных параллельных прямых проводников с токами I_1 и I_2, расстояние между которыми равно b.



Решение. Пусть токи I_1 и I_2 в проводниках протекают в одинаковых направлениях. Каждый из проводников создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, силовые линии которого – окружности (в перпендикулярной плоскости) с центром на оси проводника. Рассмотрим проводник с током I_2. Каждый элемент тока $I_2 dl_2$ находится в магнитном поле проводника с током I_1, индукция этого поля на расстоянии b от проводника равна: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$ (см. лекцию 5). Вектор индукции $\vec{B}_1$ направлен перпендикулярно проводнику. Тогда модуль силы, действующей на элемент второго проводника, будет равен

$$dF_{21} = I_2 B_1 dl_2 .$$

Следовательно, на единицу длины проводника с током I_2 действует сила

$$F_{21} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b} .$$

Такая же по значению сила F_{12} действует на единицу длины первого проводника с током I_1.

Следовательно, величина силы взаимодействия (на единицу длины) равна: $F_{ВЗ} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}$.

Анализ направлений сил Ампера показывает, что проводники с токами одного направления притягиваются друг к другу, а проводники с противоположно направленными токами отталкиваются.

Замечание. Так как электрический ток – это упорядоченное движение заряженных частиц, то можно утверждать, что в пучке частиц, движущихся в одном направлении, будут действовать силы, стремящиеся сжать пучок.

Из последнего соотношения следует определение одной из основных единиц системы СИ – единицы силы тока – ***ампера*** (А). Положив $I_1 = I_2 = 1 A$, $r = 1\, м$, получим $F_1 = F_2 = 2 \cdot 10^{-7} Н / м$. Следовательно, ***ампер – это сила такого неизменяющегося тока, при прохождении которого по двум параллельным прямым проводникам бесконечной длины и ничтожно малого сечения, находящимся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, на-***

блюдается сила магнитного взаимодействия между этими проводниками, равная $2\cdot 10^{-7}\,H$ ***на каждый метр длины.***

Контур с током в магнитном поле

При описании действия магнитного поля на замкнутый контур (рамку) с током такой контур можно характеризовать магнитным моментом $\vec{p}_m$. Для плоского контура

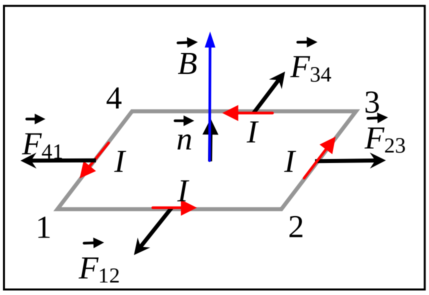
$$\vec{p}_m = IS\vec{n}\,,$$

где I – сила тока в контуре, S - площадь поверхности, ограниченной контуром, $\vec{n}$ - единичная нормаль к плоскости контура, направление которой связано с направлением тока в контуре правилом правого винта (буравчика). Это направление совпадает с направлением индукции магнитного поля, создаваемого током в центре контура.

Вектор магнитного момента $\vec{p}_m$ характеризует размер контура, силу тока в нём и расположение контура в пространстве.

Рассмотрим прямоугольный (ориентированный) контур 12341 с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле ($\vec{B} = const$). Пусть сила тока в контуре I, B – величина индукции магнитного поля, α - угол между нормалью к контуру и вектором $\vec{B}$. Пусть длина стороны 12 равна a, а стороны 23 – b.

Рассмотрим несколько различных случаев.

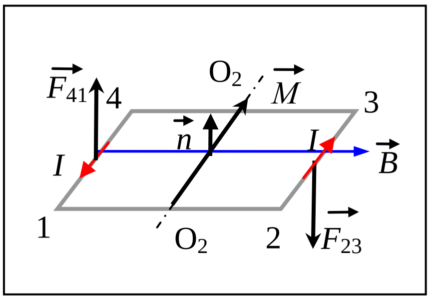


1) Пусть угол α=0, т.е. векторы $\vec{B}$ и $\vec{n}$ сонаправлены.

На стороны прямоугольника действуют силы

$F_{12} = F_{34} = IBa$, $F_{23} = F_{41} = IBb$. Векторы всех сил лежат в одной плоскости и растягивают контур. Сумма сил равна нулевому вектору, и суммарный момент сил – тоже нулевой вектор.

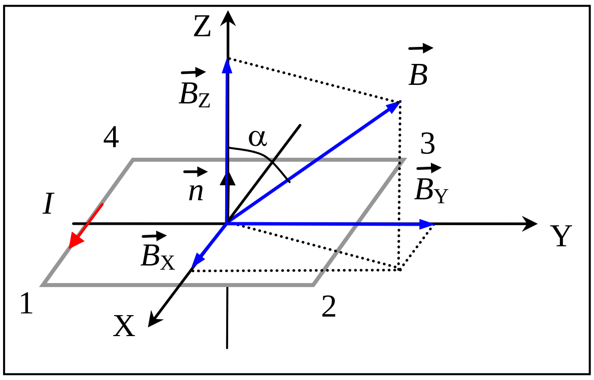
Если угол α=π, то силы сжимают контур.



2) Пусть α=π/2 и вектор $\vec{B}$ параллелен стороне 12. В этом случае $F_{12} = F_{34} = 0$, $F_{23} = F_{41} = IBb$. Сумма сил равна нулевому вектору, но суммарный момент сил равен моменту пары сил (например, относительно оси O_1O_2)

$M_{O_1O_2} = F_{23}\cdot\dfrac{a}{2} + F_{41}\cdot\dfrac{a}{2} = IBba$. А вектор момента сил $\vec{M}$ лежит на оси O_1O_2 (т.к. векторы сил стремятся развернуть контур вокруг этой оси).

<u>Напоминание</u> – направление вектора момента силы вдоль оси согласовано с возможным направлением поворота под действием силы вокруг этой оси правым винтом.



3) Рассмотрим случай, когда вектор $\vec{B}$ направлен произвольным образом. Введём декартову систему координат, начало которой поместим в центре прямоугольника, ось Z направлена вдоль нормали, а оси X и Y параллельны сторонам прямоугольника. Тогда в координатной записи $\vec{B}=\left(B_X,B_Y,B_Z\right)$.

Расписываем проекции моментов сил на оси: $M_X=-IB_Yab$, $M_Y=IB_Xab$, $M_Z=0$. Для этого контура вектор магнитного момента равен $\vec{p}_m=\vec{n}IS=\vec{n}Iab$, его координаты: $\vec{p}_m=\left(0,0,Iab\right)$.

Утверждение. Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле равен:

$$\vec{M}=\left(\vec{p}_m\times\vec{B}\right).$$

(**Замечание!** Здесь и ниже в векторном произведении квадратные скобки заменены на круглые, но а знак умножения «×» как символ векторного произведения, естественно, сохранён.)

Доказательство. Это утверждение легко проверить во введённой декартовой системе координат. Действительно $\vec{M}=(\vec{p}_m\times\vec{B})=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ p_{mX} & p_{mY} & p_{mZ}\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ 0 & 0 & Iab\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=-\vec{e}_X IB_Yab+\vec{e}_Y IB_Xab$.

Следствие. Величина момента сил, действующих на контур с током в магнитном поле, равна:

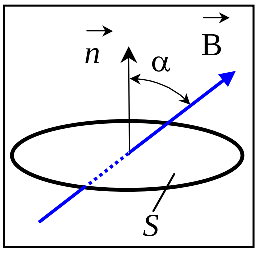
$$M=p_mB\sin\alpha=ISB\sin\alpha.$$

Отсюда следует, что вектор момента силы равен нулю в двух случаях: при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$. Но положение равновесия при $\alpha=\pi$ является неустойчивым. Из полученных соотношений следует, что свободный незакреплённый контур с током под действием магнитного поля стремится развернуться так, чтобы его вектор магнитного момента стал направлен вдоль линий индукции магнитного поля ($\alpha=0$). Такое положение контура, соответствующее $M=0$, является положением его устойчивого равновесия в однородном магнитном поле. В положении устойчивого равновесия контура его потенциальная энергия достигает минимума.

В неоднородном магнитном поле на контур с током действует вращательный момент $\vec{M}=\left(\vec{p}_m\times\vec{B}\right)$ и результирующая сила, зависящая от степени неоднородности магнитного поля. Свободный незакреплённый контур с током разворачивается полем так, чтобы магнитный момент контура совпал по направлению с вектором индукции магнитного поля, и под действием силы втягивается в область сильного магнитного поля.

МАГНИТНЫЙ ПОТОК.

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ориентированную



поверхность S называется величина $\Phi_{\vec{B}} = \iint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$. Единицы измерения магнитного потока - Вебер (Вб).

В случае, когда площадка плоская, а магнитное поле однородное, поток вектора магнитной индукции равен $\Phi_{\vec{B}} = BS\cos\alpha$, где S – величина площади, B – величина индукции, α - угол между нормалью $\vec{n}$ к площадке и вектором $\vec{B}$.

Так как силовые линии магнитного поля замкнуты (магнитное поле является вихревым), то они нигде не начинаются и не оканчиваются – поэтому ***магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю*** (сколько линий «вошло» внутрь замкнутой поверхности – столько же и «вышло»):

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0.$$

Это ***теорема Гаусса для магнитного поля* в интегральной форме**.

Следовательно**,** ***в дифференциальной форме теорема Гаусса* имеет вид**:

$$div\left(\vec{B}\right) = 0.$$

Это означает, что ***в природе нет точечных источников магнитного поля, т.е. отдельных положительных и отрицательных магнитных зарядов.***

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Рассмотрим прямой (металлический) проводник длиной l, который ***поступательно*** движется с некоторой скоростью $\vec{u}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$=const (предполагаем, что $u << c$). У каждого носителя тока есть дополнительная скорость $<\vec{v}>$ упорядоченного движения, а вместе с проводником ещё и скорость $\vec{u}$. Т.к. проводник в целом электрически нейтрален, то в нём присутствуют и положительные заряды, покоящиеся относительно проводника, которые тоже будут перемещаться со скоростью $\vec{u}$ вместе с проводником. Суммарный заряд этих положительных зарядов в объёме проводника равен по величине суммарному заряду электронов. Суммарная дополнительная плотность тока равна в этом случае нулю:

$$\vec{j}_{ДОП} = q_+ n_+ \vec{u} + q_- n_- \vec{u} = Q_+ \vec{u} + Q_- \vec{u} = \vec{0}.$$

На свободные электроны, помимо силы $\vec{F}_q = q\left[<\vec{v}> \times \vec{B}\right]$, вызванной вектором средней скорости упорядоченного движения, будет действовать дополнительная магнитная сила Лоренца, вызванная вектором скорости $\vec{u}$, которая равна $\vec{F}_{М\_Л\_Д-} = -q\left[\vec{u} \times \vec{B}\right]$.

Так как положительные заряды тоже перемещаются в магнитном поле (вместе с проводником), то появится дополнительная магнитная сила Лоренца $\vec{F}_{М\_Л\_Д+} = +q\left[\vec{u}\times\vec{B}\right]$.

Магнитные силы Лоренца, действующие на положительные и отрицательные заряды и вызванные скоростью $\vec{u}$, компенсируют друг друга:

$$\vec{F}_{М\_Л\_Д+} + \vec{F}_{М\_Л\_Д-} = \vec{0}.$$

Поэтому выражение для суммарной магнитной силы Лоренца (силы Ампера), действующей на прямой проводник с током, движущийся в магнитном поле, не изменится и в соответствии с законом Ампера

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l}\times\vec{B}\right].$$

Перемещение такого проводника в пространстве связано с механической работой, совершаемой этой силой. Найдём выражение для этой работы.

Сначала найдём работу этой силы $\vec{F}_A$ на элементарном перемещении проводника $d\vec{r}$, считая силу тока постоянной:

$$\delta A_A = (\vec{F}_A, d\vec{r}) = I(\left[\vec{l}\times\vec{B}\right], d\vec{r}) = I(d\vec{r}, \left[\vec{l}\times\vec{B}\right]).$$

Из векторного анализа известно, что смешанное произведение трёх векторов не изменяется при их циклической перестановке, поэтому работу силы Ампера можно записать в виде:

$$\delta A_A = I(d\vec{r}, \left[\vec{l}\times\vec{B}\right]) = I(\vec{B}, \left[d\vec{r}\times\vec{l}\right]).$$

По определению векторного произведения векторов $\left[d\vec{r}\times\vec{l}\right] = d\vec{S}$ - это вектор, перпендикулярный к векторам $d\vec{r}$ и $\vec{l}$, а длина его равна площади параллелограмма, построенного на векторах $d\vec{r}$ и $\vec{l}$. Поэтому $(\left[d\vec{r}\times\vec{l}\right], \vec{B}) = (\vec{B}, d\vec{S}) = d\Phi_{\vec{B}}$ - поток вектора магнитной индукции через эту малую площадку. Следовательно, выражение для работы магнитной силы на элементарном перемещении $d\vec{r}$ можно записать в виде: $\delta A_A = I\cdot d\Phi_B$.

В общем случае, при ***постоянной силе тока I***, можно записать выражение для работы силы Ампера:

$$A_A = I\iint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = I\cdot\Phi_B,$$

где $\Phi_B = \iint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ - магнитный поток через поверхность, «заметаемую» проводником при его движении, при этом в каждый момент времени векторы $(d\vec{r}, \vec{l}, d\vec{S})$ образуют правую тройку.

Рассмотрим теперь вращательное движение прямого проводника с током длиной l в однородном магнитном поле с вектором индукции $\vec{B}$, перпендикулярным плоскости, в которой проводник вращается вокруг оси, проходящей через один из его концов.

Результирующая сила Ампера F, действующая на проводник с током со стороны магнитного поля, создаёт вращательный момент M относительно оси вращения:

$$M = F\frac{1}{2}l = \frac{1}{2}IBl^2 .$$

При повороте проводника на угол $d\alpha$ такой момент силы совершает работу:

$$\delta A = Md\alpha = \frac{1}{2}IBl^2 d\alpha .$$

При своём движении проводник описывает в пространстве площадь dS поверхности, равную площади сектора:

$$dS = \frac{1}{2}l^2 d\alpha .$$

Тогда для работы момента силы при повороте проводника на угол $d\alpha$ получим следующее соотношение:

$$\delta A = IBdS = Id\Phi ,$$

где $d\Phi$, как и выше, представляет собой магнитный поток через поверхность, которую проводник с током описал в пространстве при своём движении.

Любое плоское движение прямого проводника с током всегда можно свести к поступательному и вращательному движениям. Поэтому соотношение $\delta A = Id\Phi$ определяет механическую работу, совершаемую при произвольном элементарном перемещении прямого проводника с током в плоскости.

Найдём теперь работу силы Ампера при движении линейного проводника с током произвольной формы в магнитном поле. Для вычисления этой работы из всего проводника выделим отдельный элемент тока $Id\vec{l}$ и найдём работу силы Ампера, действующей на этот элемент тока со стороны магнитного поля, на элементарном перемещении $d\vec{r}$:

$$\delta A_A = d\vec{F}d\vec{r} = I(\left[d\vec{l}\times\vec{B}\right], d\vec{r}) = I(\vec{B}, \left[d\vec{r}\times d\vec{l}\right]) = I\vec{B}d\vec{S} ,$$

где $d\vec{S}$ - вектор малой площадки, описанной вектором $d\vec{l}$ при его перемещении, $\left[d\vec{r}\times d\vec{l}\right] = d\vec{S}$.

Скалярное произведение

$$(\vec{B}, d\vec{S}) = B_n dS = d\Phi_{\vec{B}} ,$$

представляет собой магнитный поток через эту площадку dS . Суммируя элементарные работы при перемещении всех элементов линейного проводника с током, запишем результирующую работу, совершённую при элементарном перемещении всего проводника:

$$dA = \int_L \delta A = I \int_L d\Phi = Id\Phi_\Sigma \text{ ,}$$

где $d\Phi_\Sigma$ - магнитный поток через всю поверхность $d\Sigma$, описанную в пространстве линейным проводником при его произвольном элементарном перемещении.

Если при движении проводника ток в нём поддерживается постоянным, то из последнего соотношения следует универсальная формула для расчёта механической работы при произвольном конечном перемещении проводника с током в магнитном поле:

$$A = I\Phi \text{.}$$

Как видно из этого соотношения, для расчёта этой работы A нужно лишь подсчитать магнитный поток Φ через поверхность, которую описывает проводник в пространстве при своём движении.

Можно получить зависимость для расчёта работы, совершаемой при произвольном перемещении в пространстве ***замкнутого проводника (контура)*** в магнитном поле с неизменяющимся во времени током *I*. Приведём без вывода эту зависимость:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) \text{,}$$

где Φ_1, Φ_2 - магнитные потоки через площадку, ограниченную замкнутым контуром, соответственно в его первоначальном и конечном положениях. С выводом этой зависимости можно ознакомиться в учебном пособии Л.К. Мартинсона, А.Н. Морозова, Е.В. Смирнова «Электромагнитное поле».

Таким образом, ***работа, совершаемая при перемещении в магнитном поле замкнутого контура, по которому протекает постоянный ток, равна произведению этого тока на изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.***