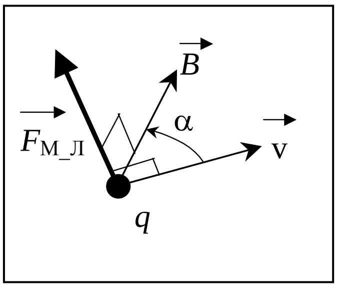
Лекция 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в электрических и магнитных полях. Ускорение заряженных частиц. Эффект Холла. Преобразования Лоренца для электрического и магнитного полей.

СИЛА ЛОРЕНЦА

Опыт показывает, что ***на заряженную частицу, которая движется в магнитном поле, действует сила, которая называется магнитной силой Лоренца***. Если скорость частицы $\vec{v}$, заряд частицы q, индукция магнитного поля $\vec{B}$, то вектор магнитной силы Лоренца определяется соотношением:

$$\vec{F}_{М\_Л} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right).$$



Векторы $\left(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}_{М\_Л}\right)$ образуют правую тройку векторов.

Модуль магнитной силы Лоренца равен:

$$F_{М\_Л} = qvB \sin\alpha,$$

здесь α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

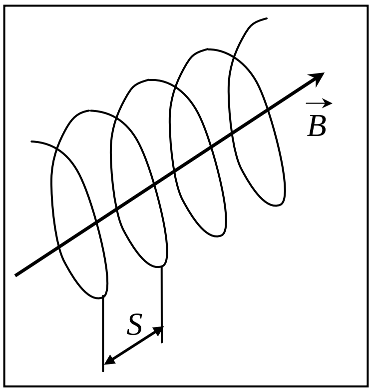
Замечание. Как определить направление силы $\vec{F}_{М\_Л}$? По правилу раскрытия векторного произведения для рассматриваемого случая: вектор силы $\vec{F}_{М\_Л}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$, и, если смотреть с конца вектора $\vec{F}_{М\_Л}$ на эту плоскость, то вектор $\vec{v}$ должен совершать вращение в направлении вектора $\vec{B}$ по наикратчайшему пути против часовой стрелки. Не забывайте ещё учесть знак заряда! Также напомним ***практическое правило***: направление вектора силы $\vec{F}_{М\_Л}$, действующей на ***положительный заряд*** $q>0$, определяется ***правилом левой руки***: вектор силы $\vec{F}_{М\_Л}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$, при этом, если вектор индукции $\vec{B}$ входит в ладонь левой руки, пальцы (собранные вместе) направлены вдоль вектора скорости $\vec{v}$, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на положительный заряд.

Так как вектор магнитной силы Лоренца перпендикулярен скорости, то ***её мощность и работа равны нулю***. ***Поэтому кинетическая энергия (и величина скорости) заряженной частицы, движущейся только в магнитном, поле остается постоянной.***

Пример. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q. Угол между вектором скорости и магнитной индукцией равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Решение. Разложим вектор скорости частицы на две составляющие: $\vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}_\perp+\vec{\mathrm{v}}_\parallel$, где $\vec{\mathrm{v}}_\perp$ - вектор, перпендикулярный $\vec{B}$, а $\vec{\mathrm{v}}_\parallel$ - вектор, параллельный $\vec{B}$. Тогда $\mathrm{v}_\perp=\mathrm{v}\cdot sin\,\alpha$, $\mathrm{v}_\parallel=\mathrm{v}\cdot cos\,\alpha$. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся с постоянной скоростью $\vec{\mathrm{v}}_\parallel$. Тогда в этой системе отсчёта частица движется только со скоростью $\vec{\mathrm{v}}_\perp$, перпендикулярной $\vec{B}$.

Вектор магнитной силы Лоренца направлен перпендикулярно скорости частицы, поэтому она



создает нормальное ускорение:

$$ma_n=q\cdot v_\perp\cdot B=q\cdot v\cdot B\cdot sin\,\alpha,$$

следовательно, траекторией движения частицы является окружность, вектор ускорения $\vec{a}_n$ направлен к центру этой окружности. Найдем радиус окружности: $m\dfrac{v_\perp^2}{R}=qv_\perp B$, отсюда $R=\dfrac{m}{q}\dfrac{v_\perp}{B}=\dfrac{v\cdot sin\,\alpha}{(q/m)B}$, где q/m – удельный заряд частицы. Период оборота частицы по окружности: $T=\dfrac{2\pi R}{v_\perp}=\dfrac{2\pi}{v_\perp}\dfrac{m}{q}\dfrac{v_\perp}{B}=2\pi\dfrac{m}{Bq}$.

Оказывается ***период оборота частицы по окружности не зависит от скорости частицы!***

Теперь вернёмся в начальную систему отсчета, где частица также движется вдоль линии поля со скоростью $\mathrm{v}_\parallel$. В этой системе отсчёта траекторией частицы является винтовая линия радиуса $R=\dfrac{v\cdot sin\,\alpha}{(q/m)B}$ и с шагом $S=v_\parallel\cdot T=v\cdot cos\,\alpha\cdot 2\pi\dfrac{m}{Bq}=2\pi\dfrac{mv\cdot cos\,\alpha}{Bq}$.♣

Магнитная сила Лоренца зависит от системы отсчёта. Например, в сопутствующей системе отсчёта, где частица покоится, магнитная сила Лоренца равна нулю. Но в классической механике вектор силы не зависит от системы отсчёта. Опыт показывает, что таким вектором силы является сила $\vec{F}_Л=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$. Эта сила называется ***силой Лоренца***. Здесь $\vec{E}$ - вектор напряжённости электрического поля.

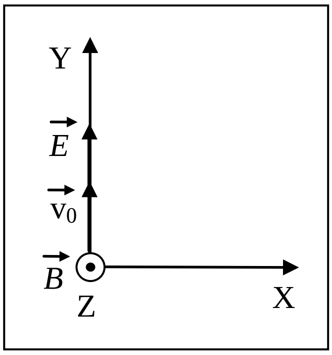
В частном случае, когда частица движется только в магнитном поле (т.е. $\vec{E}=\vec{0}$), сила Лоренца совпадает с магнитной силой Лоренца: $\vec{F}_Л=\vec{F}_{Л\_М}$. Однако, если перейти в систему отсчёта, где частица в данный момент времени покоится ($\vec{v}=\vec{0}$), то в этой системе будет $\vec{F}_{Л\_М}=\vec{0}$. Но вектор силы Лоренца не должен измениться, поэтому

$$q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=q\vec{E}'+q\left(\vec{0}\times\vec{B}'\right)=q\vec{E}'.$$

Несмотря на то что в старой системе отсчёта электрического поля не было: $\vec{E}=\vec{0}$, в новой системе отсчёта появится электрическое поле, напряжённость которого $\vec{E}'=\vec{v}\times\vec{B}$.

Пример. Рассмотрим движение положительно заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях, для случая, когда $\vec{E}\perp\vec{B}$. Масса частицы m.

Решение. Введём декартову систему координат так, чтобы вектор $\vec{E}$ был направлен вдоль оси Y, а вектор $\vec{B}$ вдоль оси Z, будем считать, что начальная скорость частицы направлена вдоль оси Y, т.е. в координатной форме записи: $\vec{E}=(0,E,0)$, $\vec{B}=(0,0,B)$, $\vec{v}_0=(0,v_0,0)$. Предположим, что в начальный момент времени (t=0) частица находилась в начале координат.



Уравнение динамики (второй закон Ньютона) для частицы:

$$m\vec{a}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right),$$

т.к. $\vec{v}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ v_X & v_Y & v_Z\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=$

$$=\vec{e}_X\left(v_YB_Z-v_ZB_Y\right)+\vec{e}_Y\left(v_ZB_X-v_XB_Z\right)+\vec{e}_Z\left(v_XB_Y-v_YB_X\right),$$

($\left(\vec{e}_X,\vec{e}_Y,\vec{e}_Z\right)$ - орты осей декартовой системы координат), то, учитывая заданные значения, уравнения динамики в координатах примут вид:

$$\begin{cases} ma_X=qv_YB\\ ma_Y=qE-qv_XB\\ ma_Z=0\end{cases}.$$

Решение третьего уравнения имеет вид $z=z_0+v_{0Z}\cdot\left(t-t_0\right)$. Из первых двух уравнений выражаем проекции скоростей: $v_Y=\frac{m}{qB}a_X$, $v_X=\frac{E}{B}-\frac{m}{qB}a_Y$ и с учётом соотношений для проекций ускорений: $a_X=\dot{v}_X$ и $a_Y=\dot{v}_Y$ получим уравнения для определения v_X и v_Y.

Уравнение для определения v_X: $\ddot{v}_X+\left(\frac{qB}{m}\right)^2v_X=\left(\frac{q}{m}\right)^2BE$ и его решение:

$$v_X=\frac{E}{B}+C_1\sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi_1\right).$$

Уравнение для определения v_Y: $\ddot{v}_Y+\left(\frac{qB}{m}\right)^2v_Y=0$, и его решение $v_Y=C_2\sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi_2\right)$.

Подставляем начальные условия при $t=0$ и для скоростей v_X,v_Y,v_Z получаем следующие соотношения:

$$v_X = \frac{E}{B} + \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2}\, sin\left(\frac{qB}{m}t - arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right), \qquad v_Y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2}\, sin\left(\frac{qB}{m}t + arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

$v_Z = 0$.

Соотношения для координат:

$$x = \frac{E}{B}t + \frac{mv_0}{qB} - \frac{m}{qB}\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2}\, cos\left(\frac{qB}{m}t - arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

$$y = \frac{mE}{qB^2} - \frac{m}{qB}\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 + (v_0)^2}\, cos\left(\frac{qB}{m}t + arctg\left(\frac{E}{Bv_0}\right)\right),$$

z=0.

Анализ траектории движения частицы представляет собой дополнительное исследование. Сделаем следующие преобразования. Перейдём от системы отсчёта x,y,z,t к системе отсчёта x_1, y_1, z_1, t, где $x_1 = x - U\cdot t,\ y_1 = y,\ z_1 = z,\ t_1 = t$ (обычные Галилеевы праобразования). Так как U – произвольно введённая скорость, то надо бы как-то разумнее ею распорядиться. Пусть $U = \frac{E}{B}$. Вот с такой скоростью движется новая подвижная СО относительно старой неподвижной (лабораторной) СО. Если мы запишем наши уравнения движения в новой подвижной СО, то оказывается, что напряжённость поля $\vec{E}$ обращается в нуль, т.е. исчезает электрическое поле, остаётся только магнитное поле. Тогда оказывается, что частица в новой подвижной СО движется по окружности, а в старой СО частица «дрейфует» (на движение по окружности накладывается медленное поступательное движение по оси X с поступательной скоростью $U = \frac{E}{B}$ - поперёк электрического и магнитного полей. Результирующее движение - по циклоиде. Вот этот дрейф часто называют электрическим дрейфом, так как он вызван электрическим полем. Скорость электрического дрейфа зависит только от отношения напряжённостей электрического и магнитного полей. Она не зависит от заряда и энергии частиц, и, в частности, одинакова для релятивистских и нерелятивистских частиц, электронов и ядер. Но это не означает, электрический дрейф испытывают и нейтральные частицы. Ларморовский радиус нейтральной частицы бесконечен.

Происхождение электрического дрейфа вообще говоря легко понять из следующих наглядных соображений. Частица, вращающаяся вокруг поля $\vec{B}$, на одной половине окружности ускоряется электрическим полем, а на второй – замедляется. Поэтому ларморовский радиус на разных фазах вращения оказывается различным, что приводит к движению частицы в направлении перпендикулярном к векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Детальная форма траектории зависит от параметров задачи.

Ускорение заряженных частиц

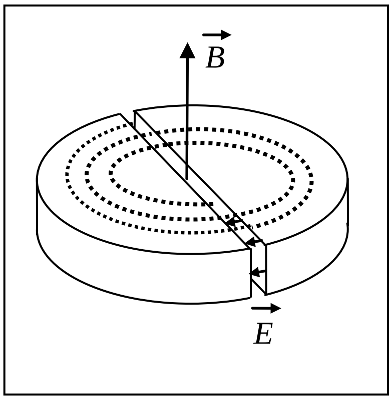
Ускорители – установки, предназначенные для ускорения заряженных частиц до высоких энергий (выше 1МэВ, т.е. выше $1{,}6\cdot10^{-13}$ Дж).

В основе работы ускорителя заложено взаимодействие заряженных частиц с электрическим и магнитным полями. Электрическое поле способно напрямую совершать работу над частицей, то есть увеличивать её энергию. Магнитное же поле, создавая силу Лоренца, лишь отклоняет частицу, не изменяя её энергии, и задаёт орбиту, по которой движутся частицы.

Ускорители можно разделить на две группы: линейные и циклические.

В линейных ускорителях частицы движутся практически по прямой траектории, разгоняясь при движении специальными электромагнитными устройствами.

В циклических ускорителях частицы движутся по практически замкнутой траектории под действием магнитной силы Лоренца и разгоняются на определённых участках.



Принцип действия ***циклотрона*** основан на независимости периода оборота заряженной частицы в магнитном поле от её скорости: $T = 2\pi\dfrac{m}{Bq}$.

Два полых электрода (дуанты), выполненных в виде половинок невысокого цилиндра, находятся в вертикальном однородном магнитном поле. Внутри откачан воздух. Когда частицы попадают в зазор между дуантами, в зазоре включается электрическое поле, разгоняющее частицы. Через половину оборота частицы подходят к щели с другой стороны, и опять включается разгоняющее электрическое поле. Скорость частиц в зазоре увеличивается, поэтому радиус траектории увеличивается. Частота колебаний напряжения между дуантами совпадает с частотой вращения частиц.

В ***фазотроне*** индукция магнитного поля уменьшается к краям, следовательно, при увеличении радиуса траектории начинает увеличиваться период оборота частиц. Поэтому, по мере разгона частиц, уменьшают частоту колебаний напряжения между дуантами.

В ***синхротроне*** траектория частиц не меняется – это обеспечивается изменяющимся во времени магнитным полем.

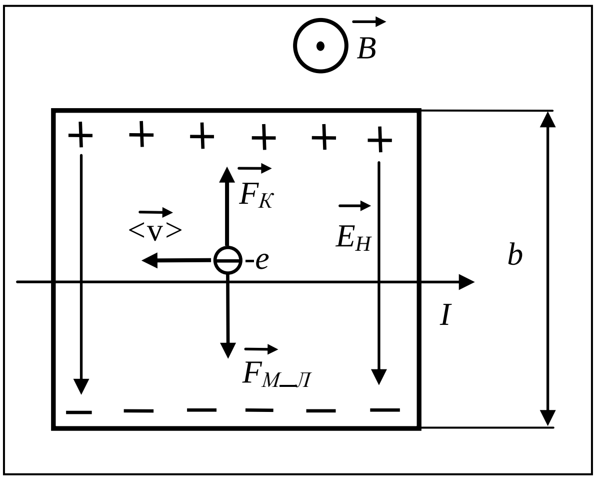
Примером ускорителя является **Большой адро́нный колла́йдер** (англ. *Large Hadron Collider, LHC*; сокр. БАК) — ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжёлых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Коллайдер построен в научно-исследовательском центре Европейского совета ядерных исследований (фр. *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, CERN*), на границе Швейцарии и Франции, недалеко от Женевы. БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире. Большим он назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26659 м; адронным - из-за того, что он ускоряет адроны, то есть частицы, состоящие из кварков; коллайдером (англ. *collide* — сталкиваться) — из-за того, что пучки частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках столкновения.

Эффект Холла

Помещаем в однородное магнитное поле (металлический) проводник выполненный в виде прямоугольного параллелепипеда так, чтобы силовые линии магнитного поля были направлены перпендикулярно одной из пар граней. Затем через вторую пару граней пропускаем электрический ток. Тогда между третьей парой граней появится напряжение. Это явление называется эффектом Холла или гальваномагнитным явлением.

Напряжение Холла между гранями: $U_H = R_H bjB$,

где R_H – постоянная Холла, b –расстоянии между гранями, между которыми возникает напряжение, j – величина плотности тока, B – величина магнитной индукции.



Ток в металлах создаётся валентными (свободными) электронами. Так как знак заряда электронов отрицательный, то они движутся против положительного направления для тока. На движущиеся электроны в магнитном поле действует магнитная сила Лоренца, под действием которой электроны начинают перемещаться к одной из граней, где образуется избыточный отрицательный заряд. Тогда у противоположной грани будет наблюдаться недостаток электронов, т.е. избыток положительного (не скомпенсированного) заряда. Т.е. произойдёт разделение электрических зарядов у пары противоположных граней, что приведёт к появлению «наведённого» (индуцированного) электрического поля, напряжённость которого E_H. Со стороны этого поля на электроны будет действовать сила Кулона, вектор которой будет направлен против вектора магнитной силы Лоренца. Когда перераспределение зарядов «закончится» (наступит равновесие для движения в поперечном направлении), то эти силы уравновесят друг друга: $\vec{F}_K + \vec{F}_{М\_Л} = \vec{0}$, откуда $qE_H = q\langle v\rangle B$. Величина напряжённости электрического поля (Холла) $E_H = \langle v\rangle B$.

Среднюю скорость упорядоченного движения носителей можно найти из выражения для плотности тока: $\vec{j} = qn\langle\vec{v}\rangle$, откуда $\langle v\rangle = \dfrac{j}{qn}$.

Для напряжения Холла $U_H = E_H b$, поэтому $U_H = \frac{j}{qn} Bb$. Следовательно, постоянная Холла : $R_H = \frac{1}{qn}$.

Эффект наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках. По знаку постоянной Холла судят о знаке заряда носителей.

Эффект Холла используется, например, в приборах, регистрирующих магнитные поля.

Замечание. ***Магнетосопротивление*** (магниторезистивный эффект) — изменение электрического сопротивления вещества в магнитном поле. Все проводники в той или иной мере обладают магнетосопротивлением. Явление качественно можно объяснить действием магнитной силы Лоренца на движущиеся носители тока.

Преобразования Лоренца для электрического и магнитного полей.

Электрическое и магнитное поле неразрывно связаны друг с другом и образуют единое ***электромагнитное поле***. При переходе от одной системы отсчёта к другой векторы напряжённости электрического и магнитного полей преобразуются друг в друга. Пусть в системе отсчёта К заданы векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, тогда вектор напряжённости $\vec{E}$ электрического поля и вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля можно представить в виде сумм перпендикулярных и параллельных составляющих:

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel, \quad \vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel, \quad \text{где} \quad \vec{E}_\parallel \parallel \vec{v}, \quad \vec{B}_\parallel \parallel \vec{v} \quad \text{и} \quad \vec{E}_\perp \perp \vec{v}, \quad \vec{B}_\perp \perp \vec{v}.$$

Тогда в системе отсчёта К′, движущейся с относительной скоростью $\vec{v}$, преобразования векторов имеют следующий вид:

- параллельные составляющие не меняются: $\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel$, $\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$,

- перпендикулярные преобразуются по закону: $\vec{E}'_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \left(\vec{v}\times\vec{B}_\perp\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $\vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}_\perp\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

Замечание. По свойствам векторного произведения: $\left(\vec{v}\times\vec{B}_\parallel\right) = \vec{0}$, поэтому

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = \left(\vec{v}\times\left(\vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp\right)\right) = \left(\vec{v}\times\vec{B}_\parallel\right) + \left(\vec{v}\times\vec{B}_\perp\right) = \left(\vec{v}\times\vec{B}_\perp\right),$$

аналогично $\left(\vec{v}\times\vec{E}\right) = \left(\vec{v}\times\vec{E}_\perp\right)$.

Следовательно, последние две формулы можно записать в виде:

$$\vec{E}'_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Пример. Найдём выражение для индукции магнитного поля, создаваемого малым проводником с током.

Решение. Пусть (в вакууме) имеется покоящийся точечный заряд q. Т.к. заряд покоится, то магнитного поля нет, т.е. $\vec{B}=\vec{0}$. Введём систему отсчёта К, начало которой совпадает с точечным зарядом. Если $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки в этой системе, то вектор напряжённости электрического поля в этой точке равен:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}.$$

Перейдем в систему отсчёта К′, которая движется с некоторой скоростью $\vec{u}$ относительно системы К (предполагаем, что величина скорости u мала по сравнению со скоростью света в вакууме: $u \ll c$, поэтому $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1$). Заряд q в системе К покоится, следовательно, он движется в системе К′ со скоростью $\vec{v} = -\vec{u}$.

Т.к. в системе отсчёта К магнитного поля нет, то $\vec{B}=\vec{0}$, следовательно $\vec{B}_\perp = \vec{0}$ и $\vec{B}_\parallel = \vec{0}$, поэтому в системе К′: $\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel = \vec{0}$, а $\vec{B}'_\perp = -\frac{1}{c^2}(\vec{u}\times\vec{E})$.

Тогда $$\vec{B}'_\perp = -\frac{1}{c^2}\left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right) = -\frac{1}{c^2}\left(\vec{u}\times\vec{E}\right) = -\frac{1}{c^2}\left(\vec{u}\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\left(\vec{u}\times\vec{r}\right).$$

Теперь учтём:

- что заряд q движется в системе отсчёта К′ со скоростью $\vec{v} = -\vec{u}$,
- что индукция магнитного поля в системе отсчёта К′ равна $\vec{B}' = \vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp = \vec{B}'_\perp$,
- что $\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$,

и получим выражение для индукции магнитного поля $\vec{B}'$, которое создаётся электрическим зарядом q движущимся со скоростью $\vec{v}$, в точке, задаваемой радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left(\vec{v}\times\vec{r}\right)}{r^3}.$$

Рассмотрим малый элемент проводника длиной dl, достаточно тонкий, чтобы в его поперечном сечении (величиной $S_\perp$) плотность тока j можно было считать постоянной. Тогда можно записать для плотности тока $\vec{j} = qn < \vec{v} >$ и для силы тока $I = jS_{\perp} = qn < v > S_{\perp}$. Количество заряженных частиц, находящихся в объёме этой части проводника, равно $N = nS_{\perp}dl$. Все эти частицы являются носителями тока и движутся с одинаковой (средней) скоростью $< \vec{v} >$. При этом каждая из них создает магнитное поле с индукцией $\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left(< \vec{v} > \times \vec{r}\right)}{r^3}$.

Рассмотрим некоторую точку пространства вне проводника и найдём в ней магнитную индукцию по принципу суперпозиции: $d\vec{B} = \sum_{k=1}^{N}\vec{B}_k$. Т.к. проводник очень мал, то можно приближённо считать, что все радиус-векторы, отсчитываемые от каждой частицы и «указывающие» в данную точку, одинаковые и равны $\vec{r}$. При сделанных предположениях для всех частиц (k = 1,…, N), $\vec{B}_k = \vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left(< \vec{v} > \times \vec{r}\right)}{r^3}$, следовательно,

$$d\vec{B} = \sum_{k=1}^{N}\vec{B}_k = N\vec{B}_q = nS_{\perp}dl\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(< \vec{v} > \times \vec{r})}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnS_{\perp}dl(< \vec{v} > \times \vec{r})}{r^3}.$$

Введём вектор $d\vec{l}$ направленный по направлению тока и такой, чтобы выполнялось равенство:

$$< v > d\vec{l} = < \vec{v} > dl.$$

Очевидно, вектор $d\vec{l}$ направлен по скорости носителя тока, т.е. является касательным к линии тока в проводнике и направлен в направлении тока.

Тогда для индукции магнитного поля можно записать:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnS_{\perp}dl\left(< \vec{v} > \times \vec{r}\right)}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qnS_{\perp} < v > \left(d\vec{l} \times \vec{r}\right)}{r^3}.$$

Т.к. сила тока в проводнике равна $I = qn < v > S_{\perp}$, то индукция магнитного поля в точке вне проводника, определяемая радиус-вектором $\vec{r}$ от малой части проводника длиной dl, в которой вектор $d\vec{l}$ направлен по току, задаётся выражением

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left(d\vec{l} \times \vec{r}\right)}{r^3}.$$

Мы получили зависимость идентичную закону Био-Савара-Лапласа, что говорит ***о верности проведённых рассуждений***.♣